Troubles d'apprentissage en mathématiques et construction du nombre

FLORENCE PETEERS

FLORENCE.PETEERS@U-CERGY.FR

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation
Académie de Versailles

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

LDAR LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ | RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES SCIENCES

Plan de la conférence

PARTIE 1

Troubles d’apprentissage en mathématiques : Point de vue cognitif et didactique

Questions

.... *Pause* ....

PARTIE 2

Construction du nombre : Points de repères et difficultés

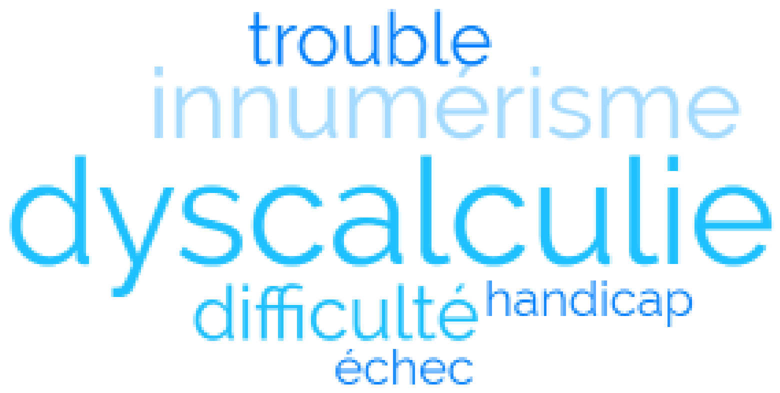
Questions

Partie 1

TROUBLES D’APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUES : POINT DE VUE COGNITIF ET DIDACTIQUE

Dyscalculie, innumérisme ou difficultés ?

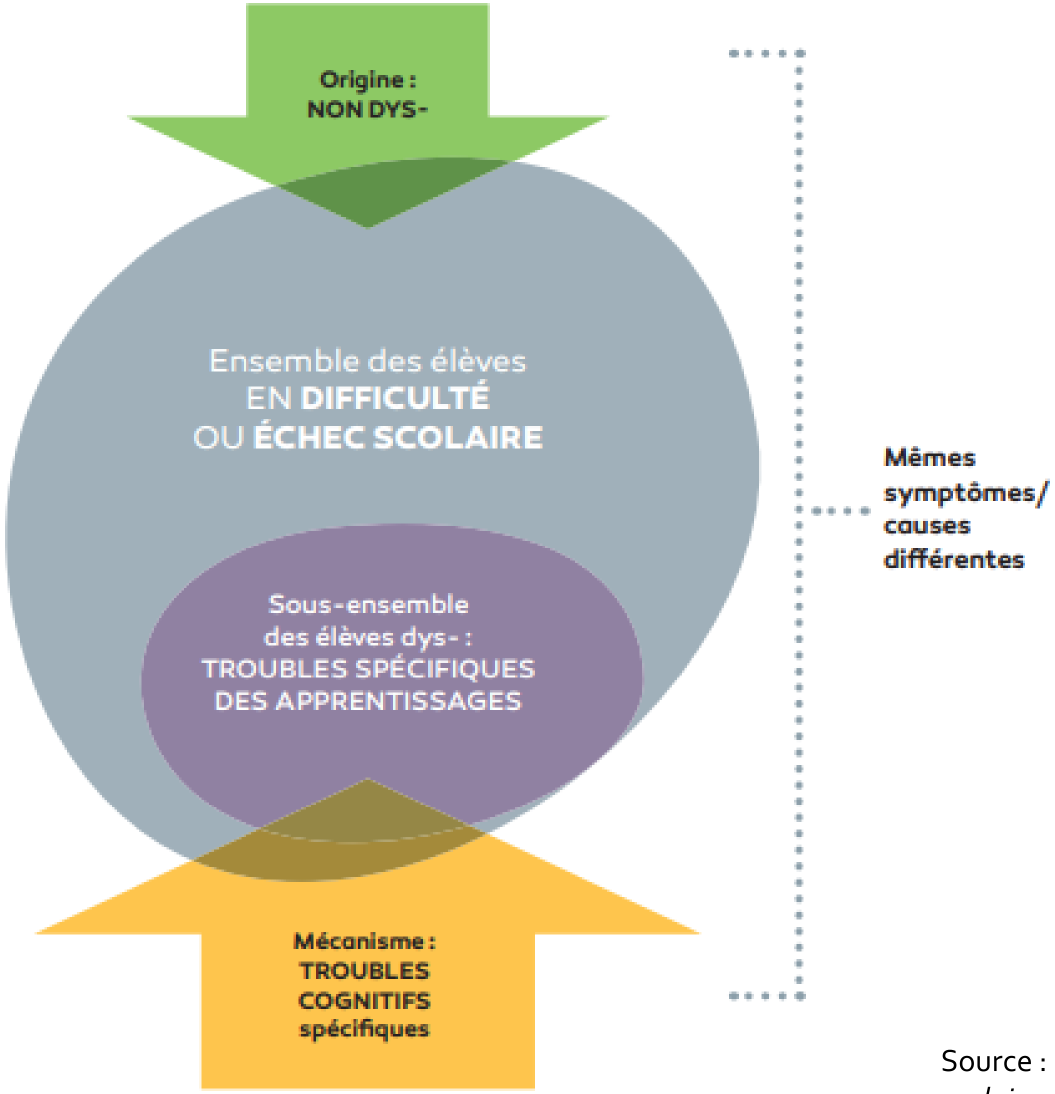
Différentes terminologies privilégiées suivant le contexte :



Trouble vs difficulté

Difficulté	VS	Trouble
Ecart de performance par rapport à la moyenne **d'origine environnementale, socioculturelle, émotionnelle, pédagogique** ou encore liée à un handicap sensoriel ou un retard du développement **Provisoire et contextuelle**		Ecart de performance par rapport à la moyenne d'**origine biologique, liée à un dysfonctionnement cognitif** **Résistant et durable**
Innumérisme		**Dyscalculie**

Définitions issues du rapport de l'INSERM (2007) et Giroux (2011)



Source : Pouhet A. & Cerisier-Pouhet M. (2015). *Difficultés scolaires ou troubles dys ?*. Paris : Retz. p.15

Modèles de traitement du nombre

La genèse du nombre chez l'enfant (Piaget & Szeminska, 1941)

La construction du nombre est liée au développement des **compétences logiques**

Le concept du nombres est acquis chez l'enfant vers 6 ou 7 ans, avec l'acquisition de la notion de conservation.

Pourtant…

Sens inné du nombre ?

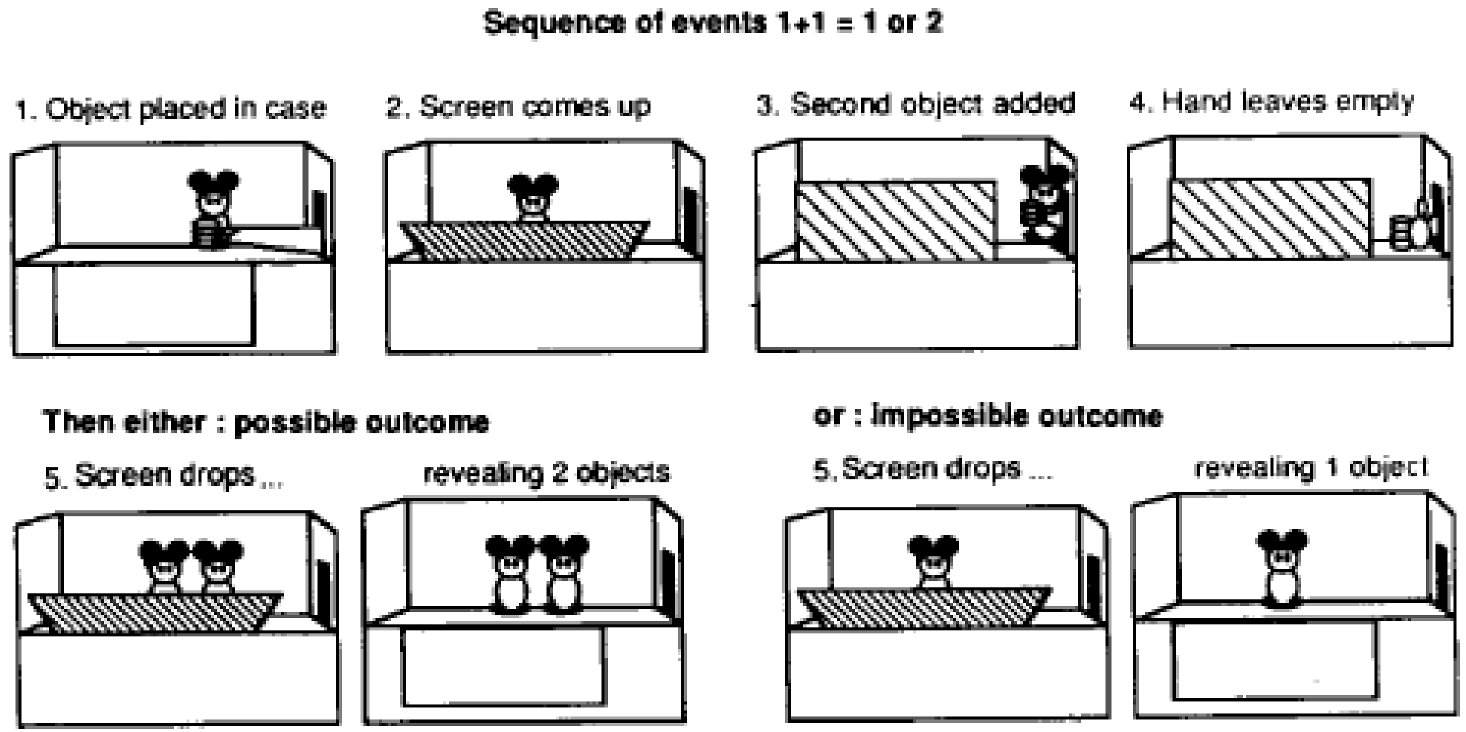
Années 90 : expérimentations mettant en évidence les facultés numériques élémentaire des bébés

- Sensibilité au changement de numérosité (Xu et Spelke, 2000)

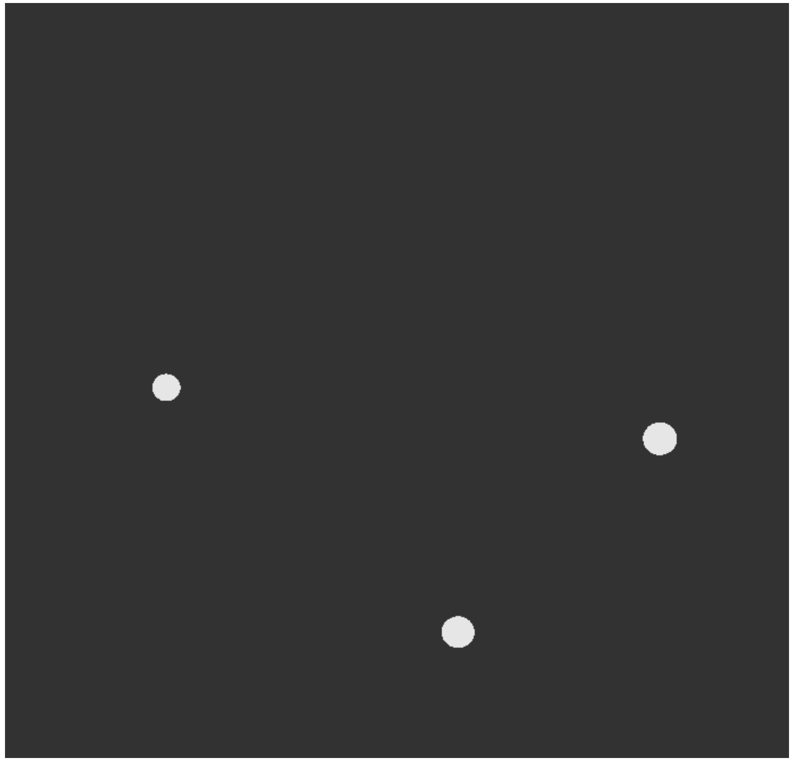
  → *Paradigme d'habituation*

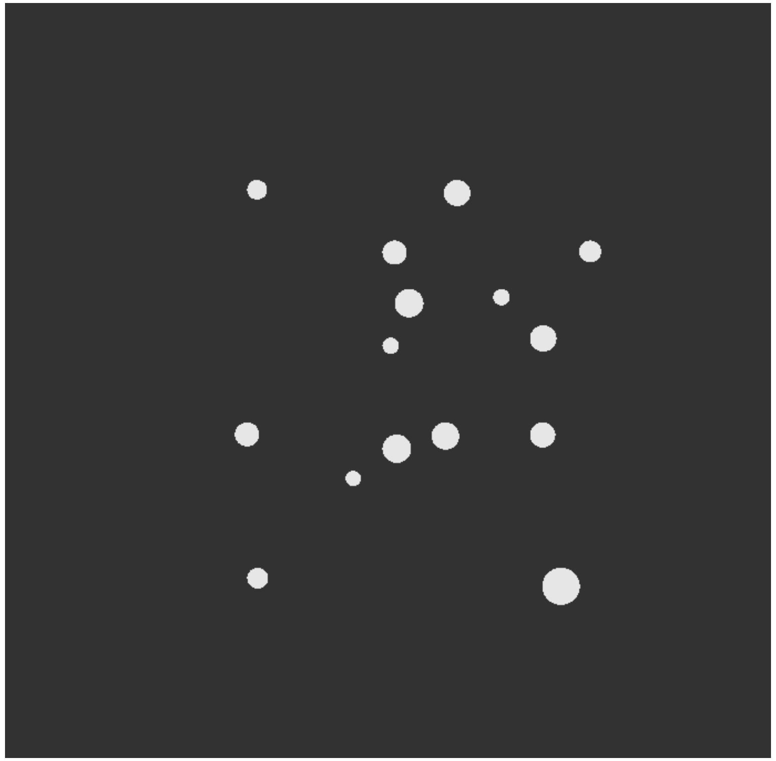
- Capacités arithmétiques (Wynn, 1992)

  → *Paradigme de violation des attentes*


Sequence of events 1+1 = 1 or 2
1. Object placed in case
2. Screen comes up
3. Second object added
4. Hand leaves empty
Then either : possible outcome
5. Screen drops ...
revealing 2 objects
or : impossible outcome
5. Screen drops ...
revealing 1 object

2 systèmes de représentations



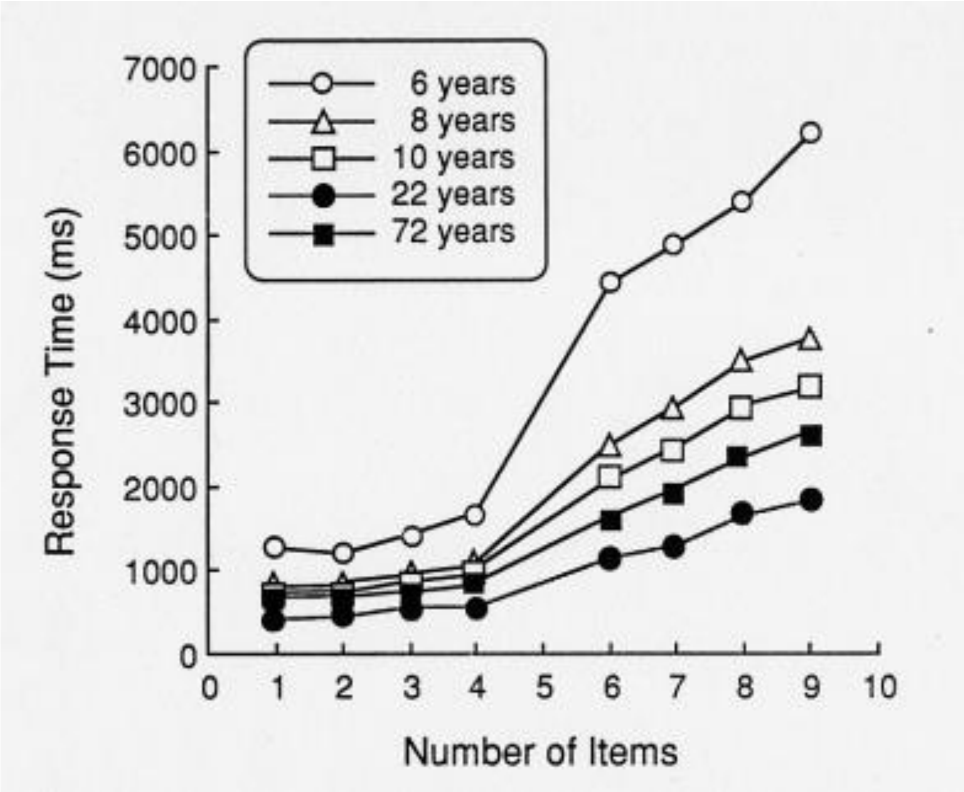


2 systèmes de représentations

Le système numérique précis (SNP)

Représentations précises des petites quantités

Renvoie au processus de **subitizing** (processus de perception quasi-instantanée et adéquate de la numérosité de petites collections)



Enns, Brodeur & Trick (1998)

2 systèmes de représentations

Le système numérique approximatif (SNA)

Représentations approximatives des grandes quantités

Renvoie au processus d’**estimation** (c’est-à-dire le processus rapide et intuitif permettant de percevoir approximativement de grandes quantités)

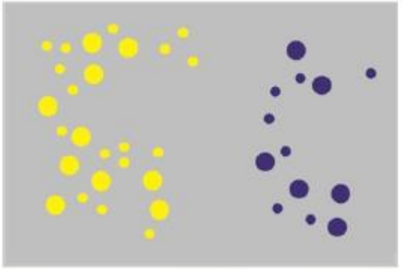
L’acuité numérique se développe avec l’âge

- Comparaison de collections
- Ligne numérique

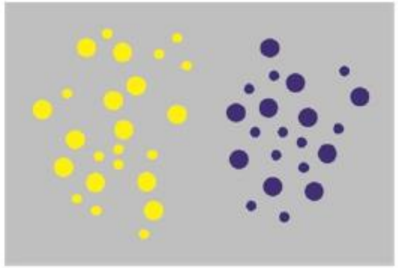
Avez-vous une bonne acuité numérique ?

http://panamath.org/briefdemo.php

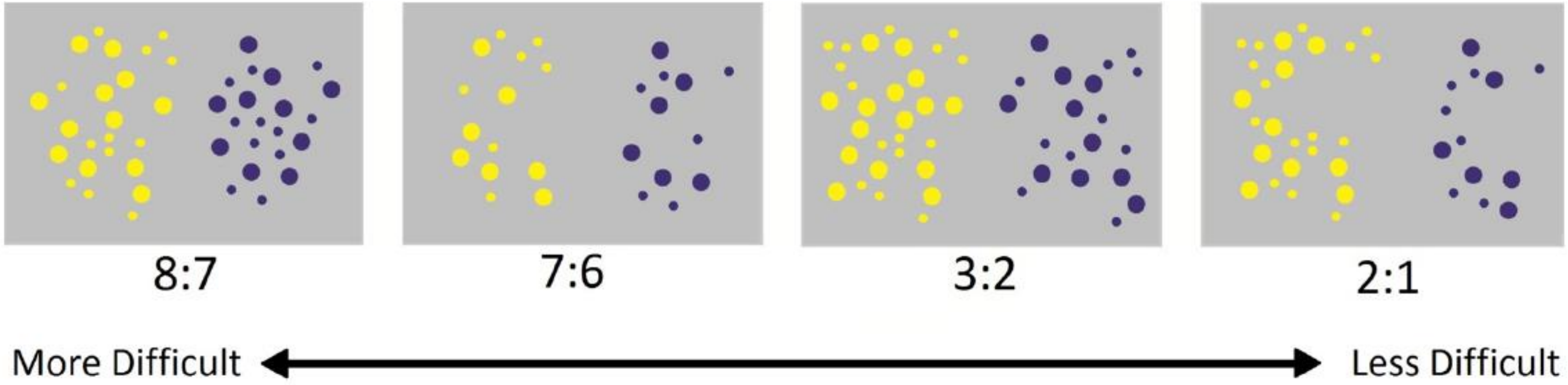
Comparaison de collections



Comparaison de collections



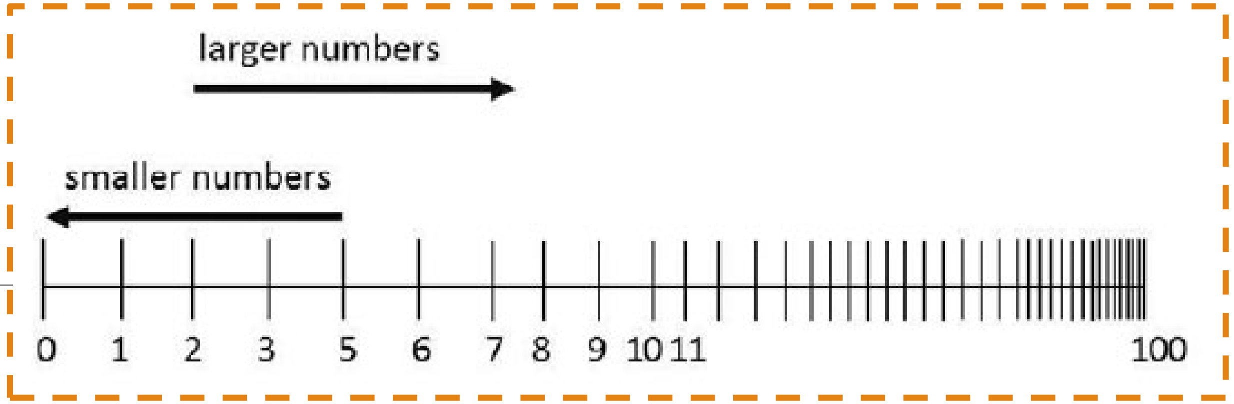
Comparaison de collections

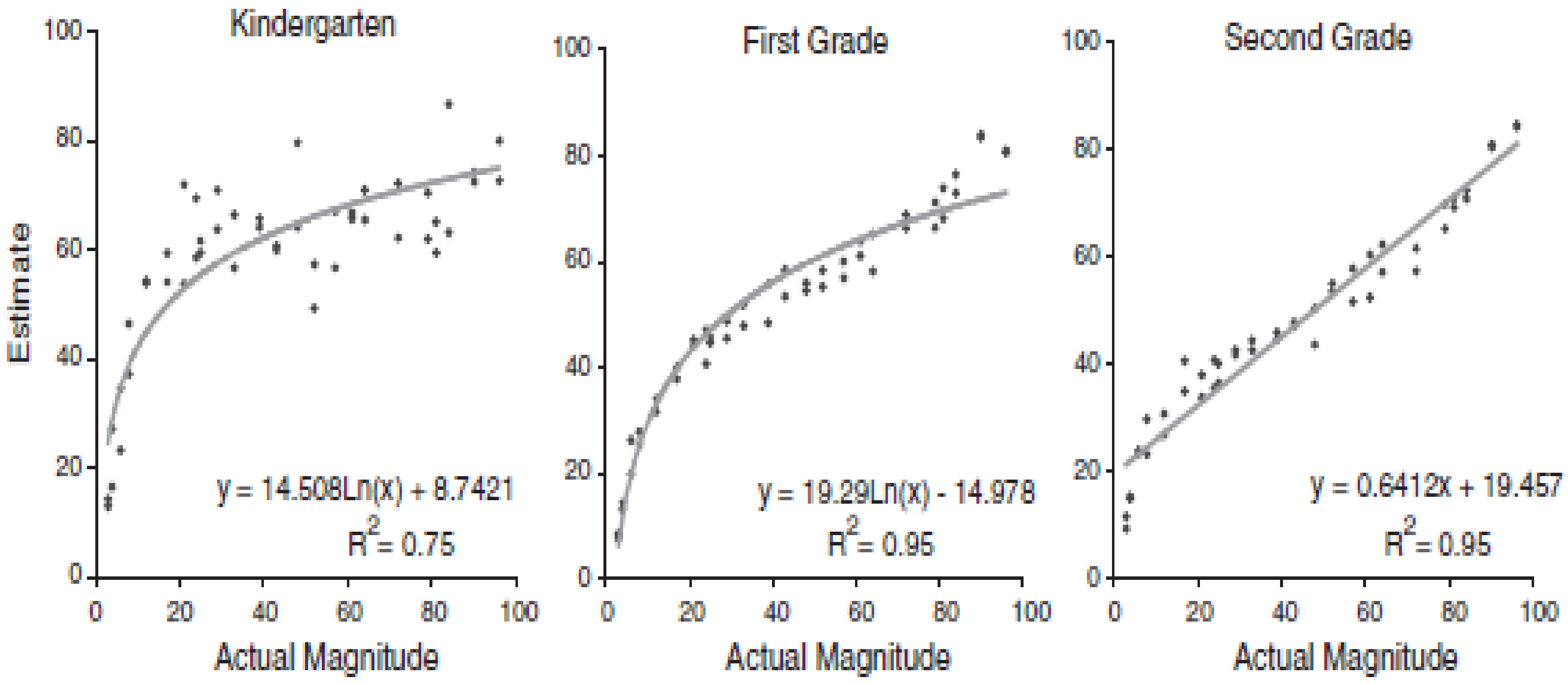


Keller & Libertus (2015)

3 ans : perception des quantités avec un ratio 4:3
6 ans : perception des quantités avec un ratio 6:5
Adultes : perception des quantités avec un ratio jusqu'à 11:10

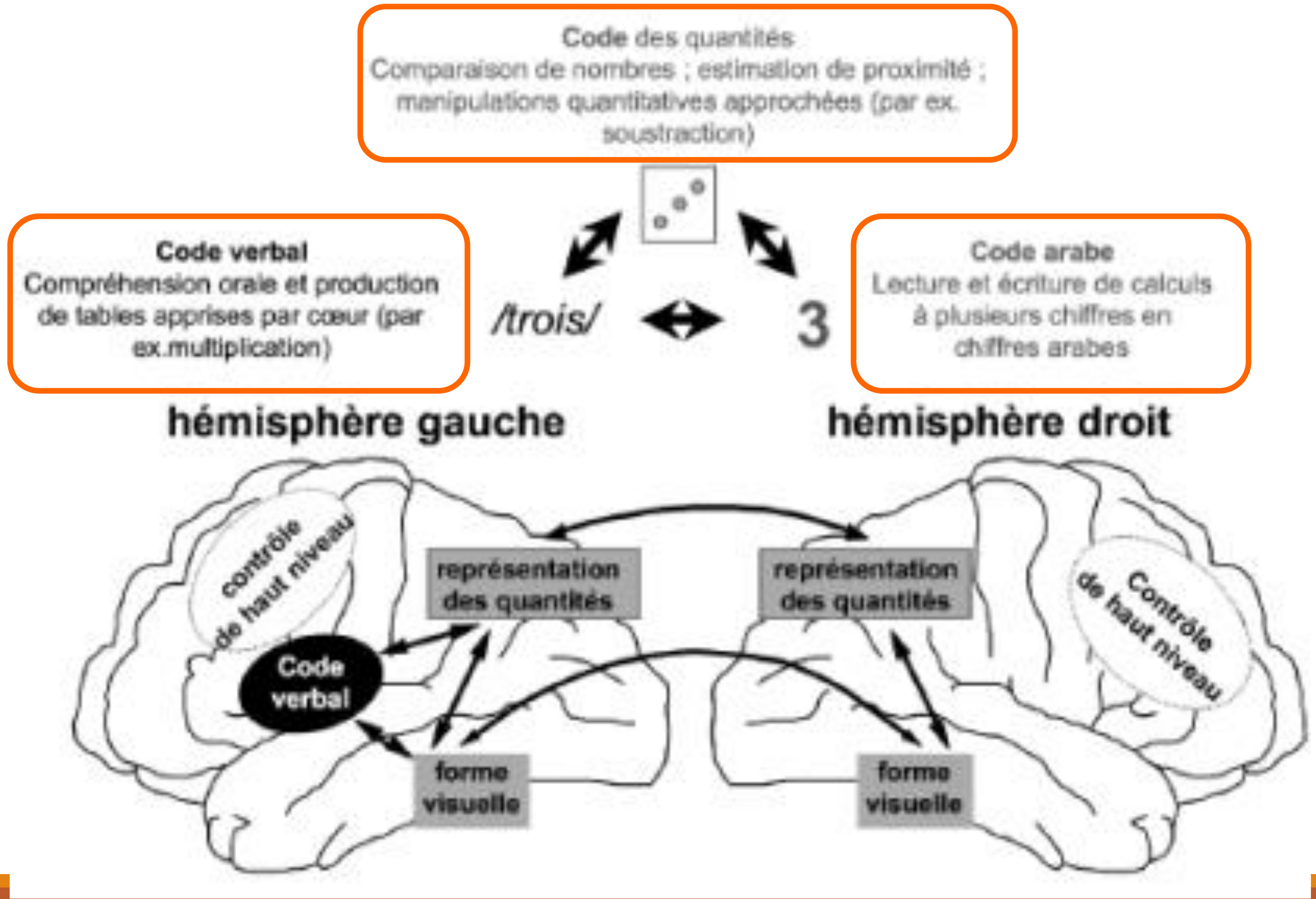
Ligne numérique



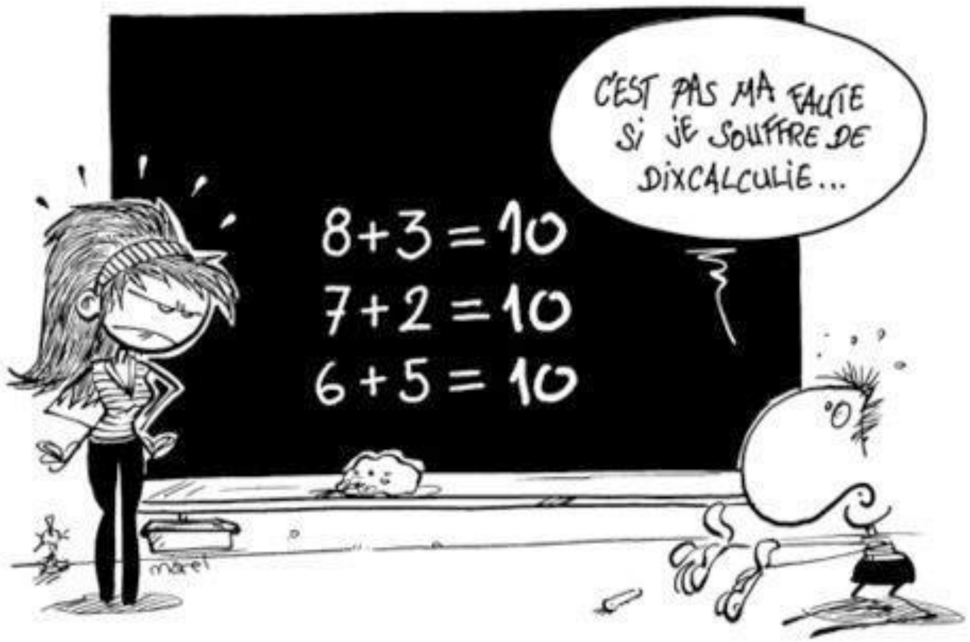


Siegler & Booth (2004)

Un modèle de traitement du nombre : le modèle du triple code (Dehaene, 1992)



La dyscalculie : Que sait-on exactement ?



Définition

Début du 20ème siècle : étude de patients adultes ayant subi des lésions cérébrales et présentant des troubles du calcul

Introduction du terme « acalculie » par Henschen en 1919

En 1974, Kosc définit la dyscalculie développementale comme « un trouble structurel des habiletés mathématiques dont l'origine est génétique ou liée à un problème congénital affectant les aires cérébrales qui sont le substrat anatomo-physiologique direct de la maturation des habiletés mathématiques sans trouble simultané des fonctions mentales plus générales »

Définition

A l'heure actuelle :

- Différents termes (*learning disabilities in mathematics* ou encore de *arithmetic disabilities*)
- Différentes définitions (trouble du calcul, des habilités arithmétiques, du sens du nombre, …). Il existe plus de **70 définitions différentes** !

Un **définition officielle** : celle du **DSM V** (manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux)

Définition du DSM V

A. Difficultés à apprendre et à utiliser des compétences scolaires ou universitaires, comme en témoigne la présence d'au moins un des symptômes suivants ayant **persisté pendant au moins 6 mois, malgré la mise en place de mesures ciblant ces difficultés.**

5. **Difficultés à maîtriser le sens des nombres, les données chiffrées ou le calcul** (p. ex. a une compréhension médiocre des nombres, de leur ordre de grandeur et de leurs relations ; compte sur ses doigts pour additionner des nombres à un seul chiffre au lieu de se souvenir des tables d'addition comme le font ses camarades ; se perd au milieu des calculs arithmétiques et peut être amené à changer de méthode).

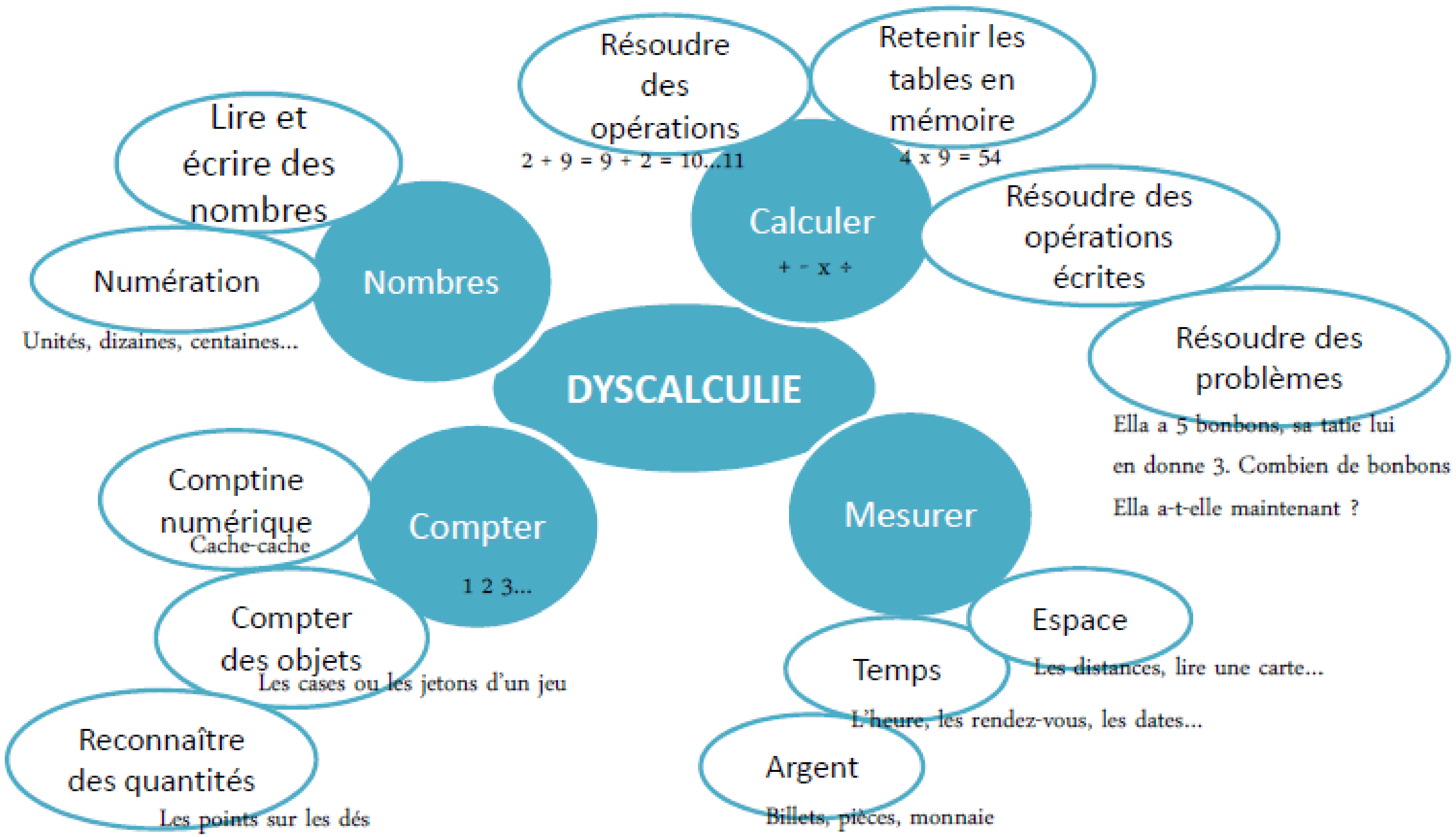
6. **Difficultés avec le raisonnement mathématique** (p. ex. a de grandes difficultés à appliquer des concepts, des données ou des méthodes mathématiques pour résoudre les problèmes)

B. **Les compétences scolaires ou universitaires perturbées sont nettement au-dessous du niveau escompté pour l'âge chronologique du sujet, et ce de manière quantifiable**. Cela interfère de façon significative avec les performances scolaires, universitaires ou professionnelles, ou avec les activités de la vie courante, comme le confirment des tests de niveau standardisés administrés individuellement ainsi qu'une évaluation clinique complète. Pour les individus âgés de 17 ans et plus, des antécédents avérés de difficultés d'apprentissages perturbantes peuvent se substituer à une évaluation standardisée.

C. **Les difficultés d'apprentissage débutent au cours de la scolarité** mais peuvent ne pas se manifester entièrement tant que les demandes concernant ces compétences scolaires ou universitaires altérées ne dépassent les capacités limitées du sujet (...).

D. Les difficultés d'apprentissage **ne sont pas mieux expliquées** par un handicap intellectuel, des troubles non corrigés de l'acuité visuelle ou auditive, d'autres troubles neurologiques ou mentaux, une adversité psychosociale, un manque de maîtrise de la langue de l'enseignement scolaire ou universitaire ou un enseignement pédagogique inadéquat. (American Psychiatric Association 2015, p.76)

Manifestations

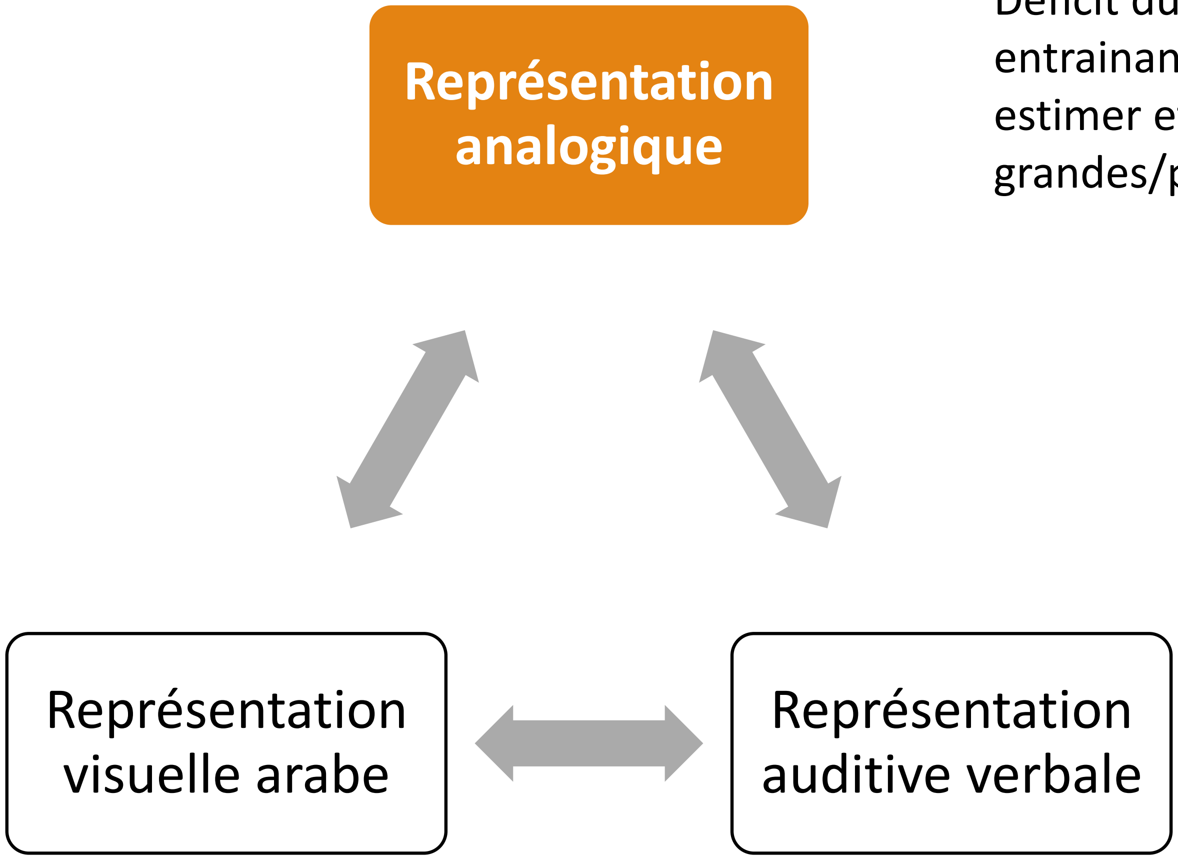


Lafay (2016)

Causes

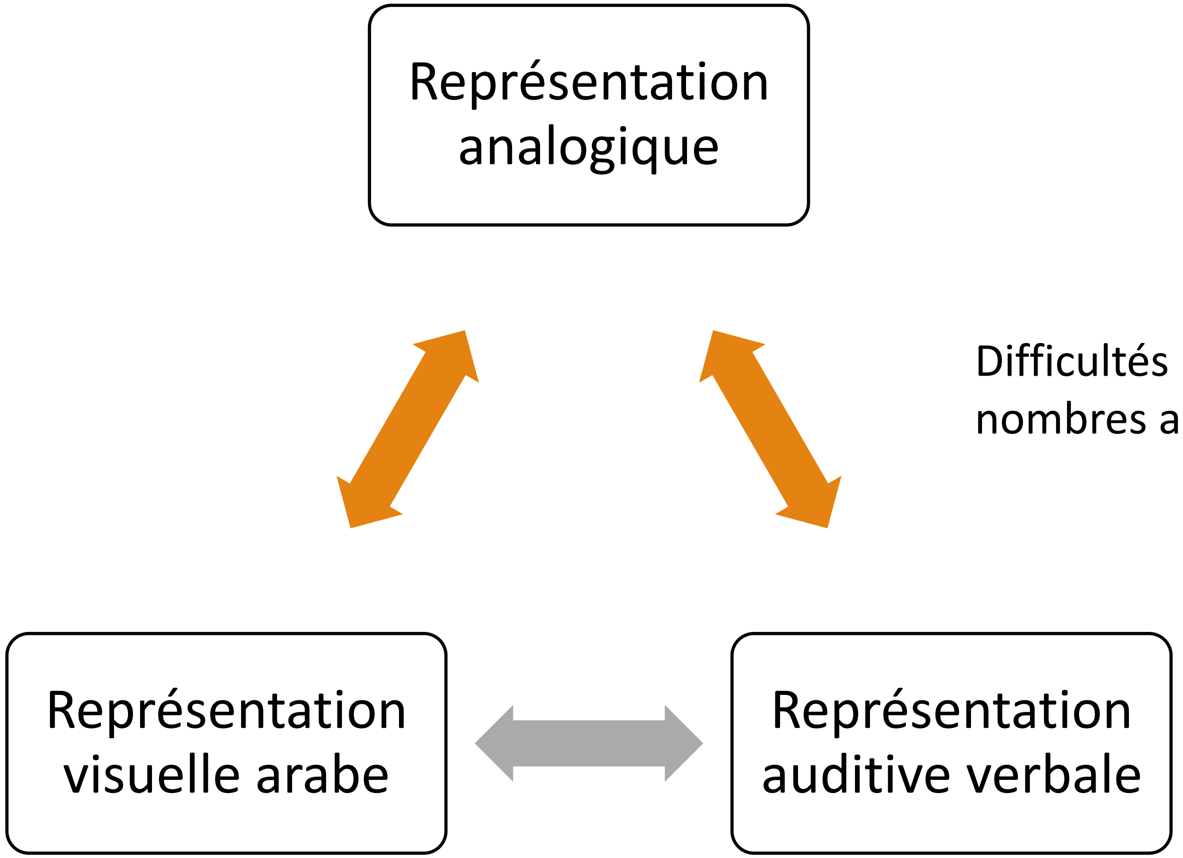
- Différentes hypothèses
  - Déficit spécifique
    - Déficit du sens du nombre
    - Déficit d’accès au sens du nombre
  - Déficit cognitif général

Déficit du sens du nombre



Déficit du SNA ou SNP entrainant des difficultés à estimer et comparer les grandes/petites collections

Déficit d’accès au sens du nombre



Difficultés à manipuler les nombres arabes ou oraux

Déficit cognitif général ou autre

Différentes fonctions cognitives sous-jacentes aux activités mathématiques :

- Fonctions exécutives
- Mémoire à long terme
- Mémoire de travail
- Fonctions visuo-spatiales
- Gnosies digitales

Dyscalculie secondaire à d’autres troubles (dyslexie, dysphasie, dyspraxie, …)

Prévalence

Proportion d’enfants dyscalculiques très variable !

En 1974, Kosc fait état d’un pourcentage de **6,4%**, de nombreuses études conduisent à un taux similaire

Remise en question de ces études par Fisher (2007) qui établit une prévalence de l’ordre de **1%**

Pourquoi de tels écarts ?

Prévalence

Sélection des individus sur base de deux critères : un critère d’inclusion (faiblesse en mathématiques) et un critère d’exclusion (niveau intellectuel anormalement faible)

<u>Le taux de prévalence dépend</u> :

- des tests utilisés
- des seuils considérés comme pathologiques

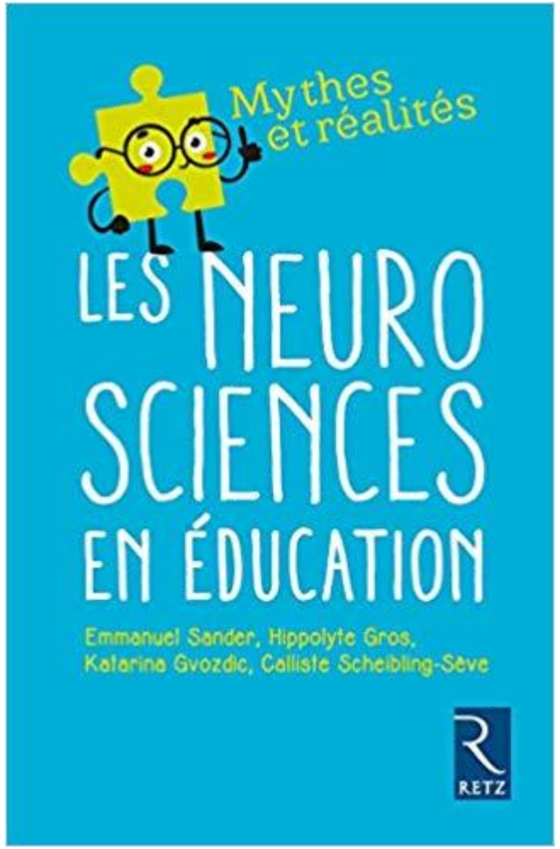
Point vigilance

Les études sont réalisées dans des conditions expérimentales particulières qui sont très éloignées des conditions réelles d'apprentissage en classe.

Elles sont généralement effectuées sur des populations adultes et les tâches proposées sont souvent élémentaires et diffèrent sensiblement des tâches utilisées par les enseignants

Conférence d'Emmanuel Sander sur les neuromythes :

https://eiah2019.sciencesconf.org/resource/page/id/12



Approche didactique

Qu’est ce que c’est ?

« La didactique des mathématiques est l’étude **de processus de transmission et d’acquisition des différents contenus** de cette science, et qui se propose de décrire et d’expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. Elle ne se réduit pas à chercher une bonne manière d’enseigner une notion fixée »

(Douady, 1984)

Approche didactique

- Les difficultés d'apprentissage ne sont pas considérées sous l'angle strict de dysfonctionnements propres à l'élève
- Le contexte, les caractéristiques de la situation dans lesquels se font les mathématiques sont pris en compte dans l'analyse des difficultés
- L'évaluation ou l'enseignement sont construits en tenant compte de la spécificité du savoir et du niveau scolaire des élèves.

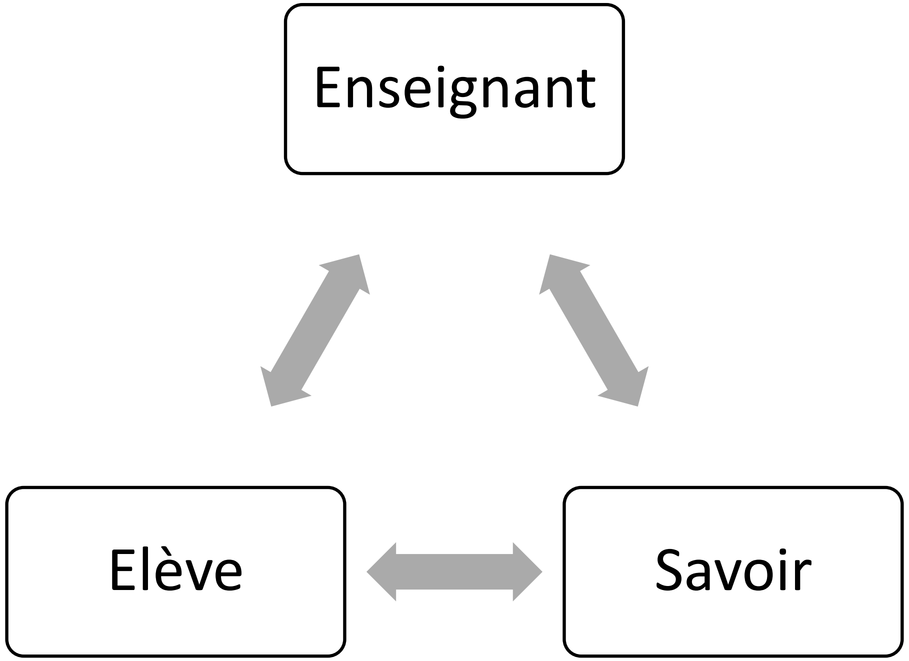
Toutes les difficultés ne sont pas pathologiques !

L’erreur dans l’apprentissage en math

- L’erreur fait partie du processus d’apprentissage
- Les erreurs récurrentes doivent attirer l’attention de l’enseignant
- Le plus souvent, ces erreurs ne sont pas dues au hasard, elles sont les manifestations d’un obstacle rencontré par l’élève dans son apprentissage
- Différentes causes possibles (IREM d’Aquitaine, 2013)

L’erreur dans l’apprentissage en math

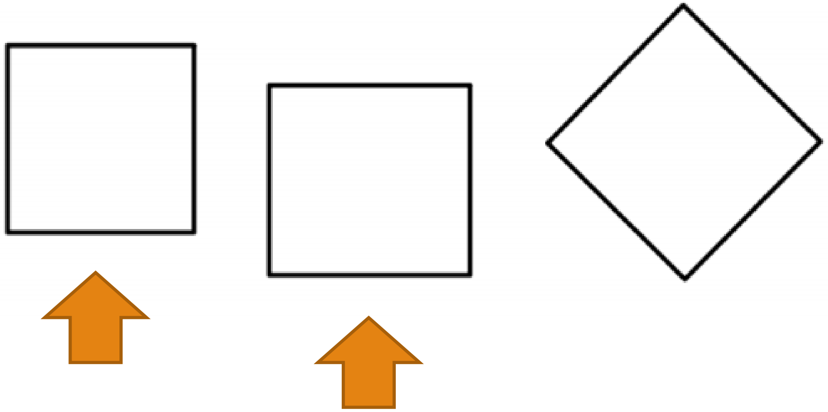
Schématisation d’une situation d’enseignement : le triangle didactique



Exemples

16,18 ... 16,108	% 5e	% 6e
>	41	80
<	56	20
=	2	

ex: Quels quadrilatères sont des carrés ?



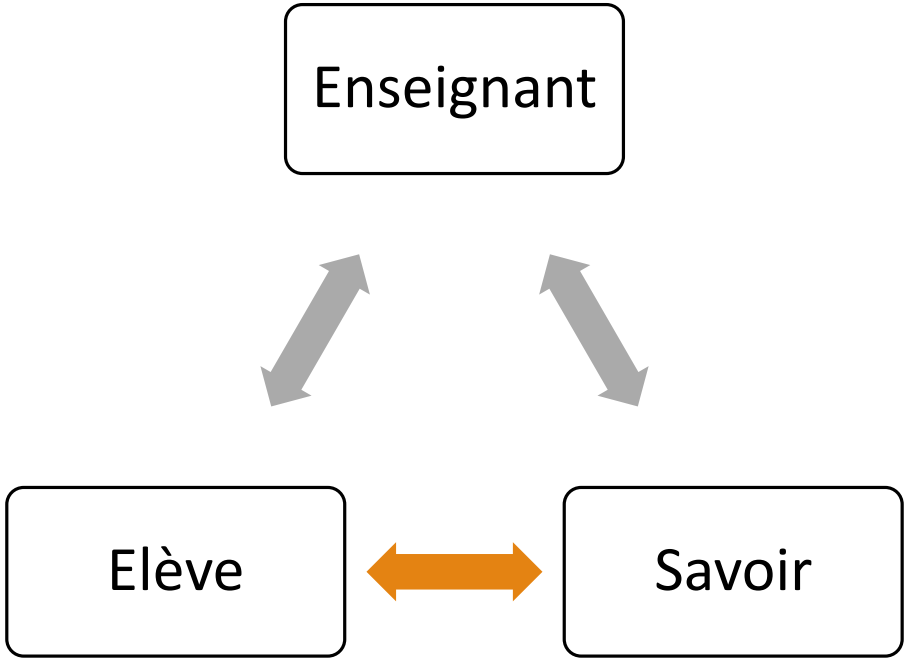
« 12 crayons coûtent 4 F, combien coûte un crayon ? »
Réponse : 12 : 4 = 3

3,8 + 7,5 = 10,13

14 x 0 = 14

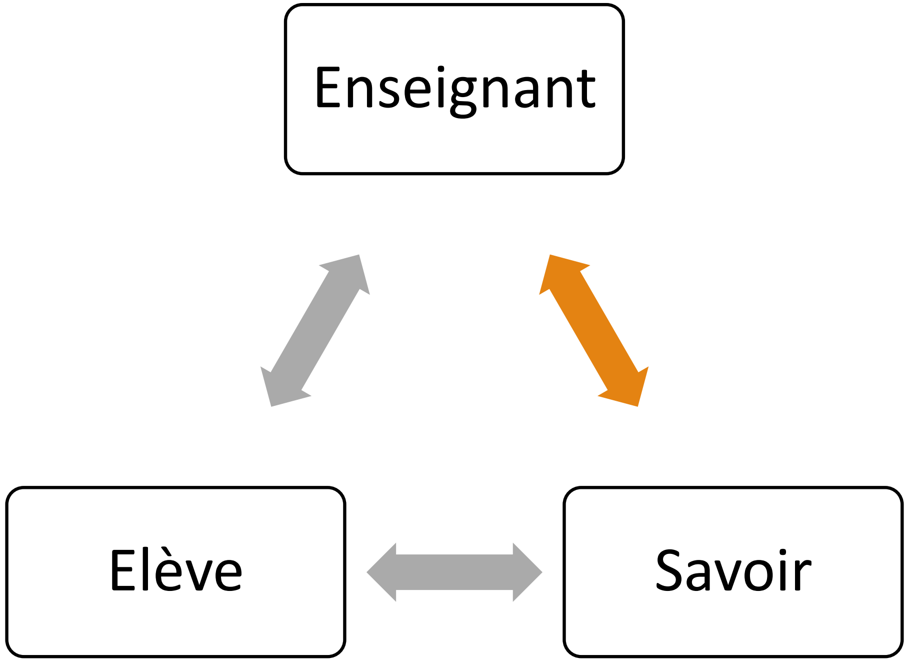
L’erreur dans l’apprentissage en math

Certaines difficultés d'élèves peuvent être analysées en référence aux conceptions des élèves relativement à un savoir déterminé.



L’erreur dans l’apprentissage en math

Certains choix didactiques de l'enseignant peuvent avoir des conséquences sur les conceptions des élèves (**obstacle didactique**)



Erreurs liées aux conceptions

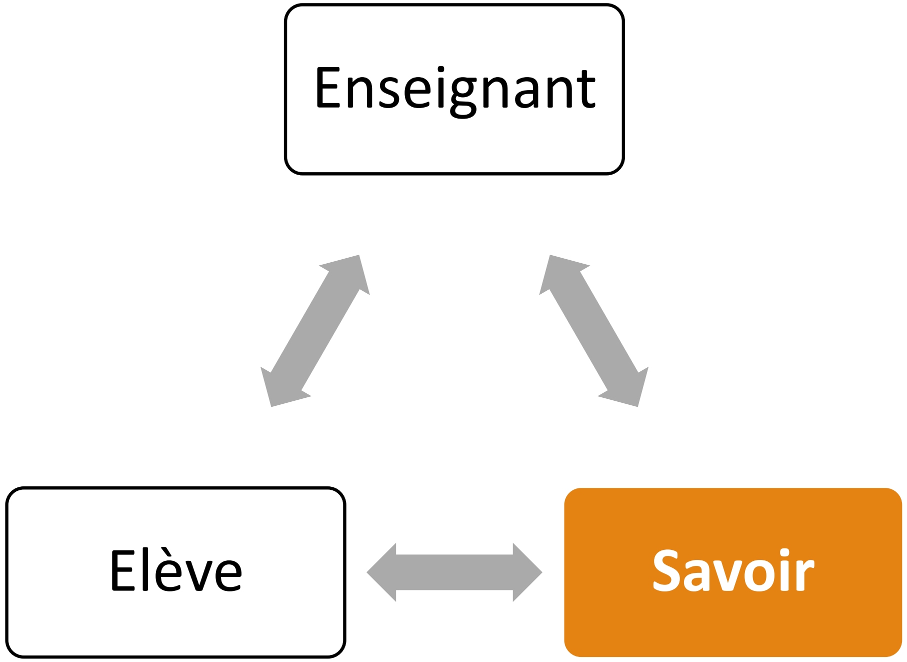
Aider l'élève à prendre conscience du caractère erroné ou insuffisant de ses conceptions pour lui permettre de les rejeter et de s'en approprier de nouvelles. Les stratégies utilisées chercheront le plus souvent à s'appuyer sur une situation de conflit :

- conflit entre les conceptions de l'élève et un démenti apporté par la situation à laquelle il est confronté, la solution mise en œuvre produisant des résultats contredits par la situation elle-même (on parle alors de situation-problème),

- conflit socio-cognitif, né du débat et de l'échange d'arguments qui peut s'instaurer entre élèves qui défendent des points de vue contradictoires.

L’erreur dans l’apprentissage en math

Les notions qui ont posé problème dans l’histoire des mathématiques peuvent également poser des difficultés aux élèves (**obstacle épistémologique**)



Exemples

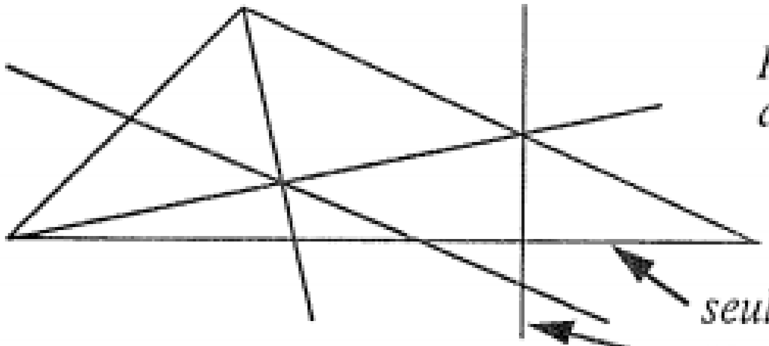
<u>L'âge du capitaine</u> :
20 chèvres, 10 moutons et 5 matelots naviguent à bord d'un bateau. Quel est l'âge du capitaine?

Ecris dans le bon ordre chaque nombre à la place sui convient.

367 582 309

300		400		500		600

IV. il a 35 ans
$20 + 10 + 5 = 35$
a sa naissance il a eu une chevre et tous les ans il a eu une chevre jus qu'a 20 ans et ensuite tous les ans en partant 20 ans a 30 ans (10 ans de moutons) et pendant 5 ans. qui lui donne 35 ans (et pendant cinq ans il a eu 1 matelot par années qui lui donnes $\boxed{\text{35 ans.}}$

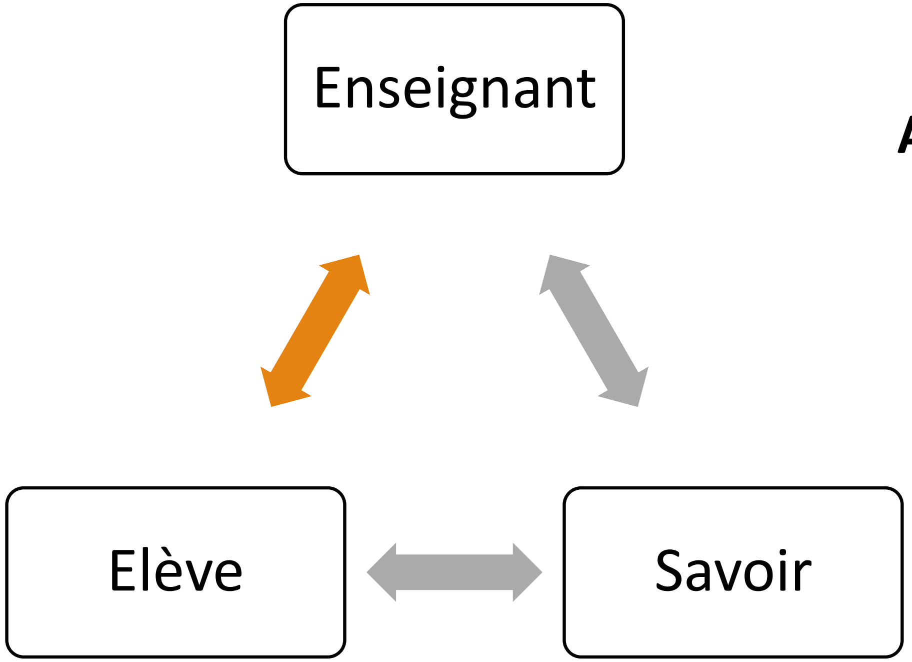


Repasser en rouge les droites perpendiculaires

seules droites repassées en rouge

L’erreur dans l’apprentissage en math

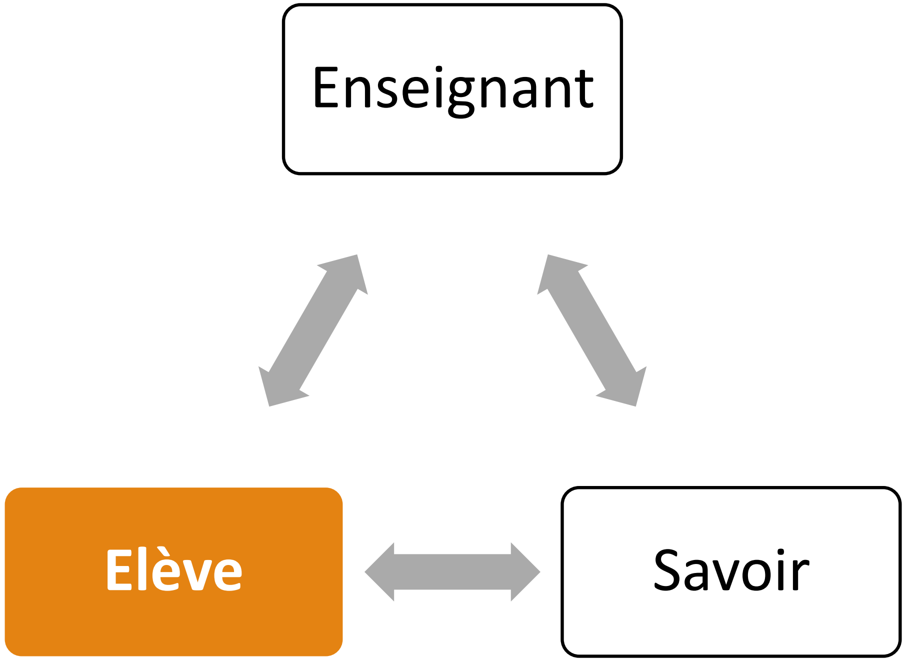
Certaines erreurs proviennent de ce que l’élève imagine des attentes de l'enseignant (liées au contrat didactiques)



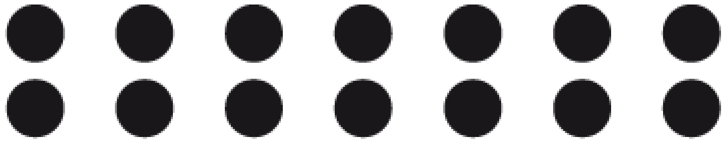
Attention à la formulation des consignes !

L’erreur dans l’apprentissage en math

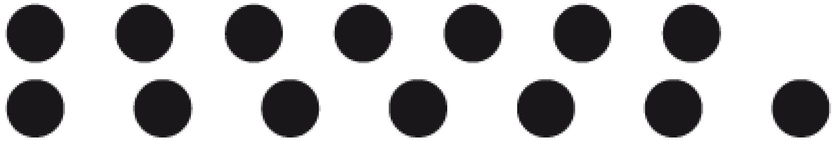
L’élève peut être limité son développement psychogénétique (**obstacle ontogénique**)



Exemple



(a) Disposition des jetons avant déplacement



(b) Disposition des jetons après déplacement

Exemple

Lucie aime jouer aux billes. À la fin de la journée, elle a 8 billes de plus que le matin.

Pourtant, la journée avait mal commencé : à midi, elle avait perdu 2 billes !

Que s'est-il passé l'après-midi ?

on ne peu pas savoir puisque on ne sais pas le nombre de billes de départ

Il s'est passé qu'elle a gagné l'aprés-midi.

Approche didactique de la dyscalculie

RITEAM

Recherche Internationale sur les Troubles dans l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques

Sur les 10 dernières années (2007-2016), 19 articles sur le sujet dans les principales revues en *math education*

Quelques constats (à paraitre) :

- Centrés sur l'école élémentaire (7-12 ans)
- Portent sur l'arithmétique et les *word problems* (opérations arithmétiques et fractions)
- Concernent majoritairement l'intervention

Vous avez tout compris ?

https://create.kahoot.it/share/trouble-d-apprentissage-en-mathematiques/bcebbc40-6d1a-4659-a4b4-c527a21d6ea4

Des questions ?

Partie 2

LE NOMBRE ET SA CONSTRUCTION : POINTS DE REPÈRES ET DIFFICULTÉS

Définition d’un concept (Vergnaud)

Composante « Techniques »

Ensemble des techniques et procédures qui permettent de travailler avec ce concept

Composante « Problèmes »

Problèmes que le concept permet de résoudre

Concept

Composante « Propriétés »

Ensemble des définitions, propriétés, théorèmes qui permettent de justifier les techniques utilisées

Composante « Langages »

Ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de le représenter

Définition d'un concept (Vergnaud)

Composante « Techniques »

Ensemble des techniques et procédures qui permettent de travailler avec ce concept

Composante « Problèmes »

Problèmes que le concept permet de résoudre

NOMBRE

Composante « Propriétés »

Ensemble des définitions, propriétés, théorèmes qui permettent de justifier les techniques utilisées

Composante « Langages »

Ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de le représenter

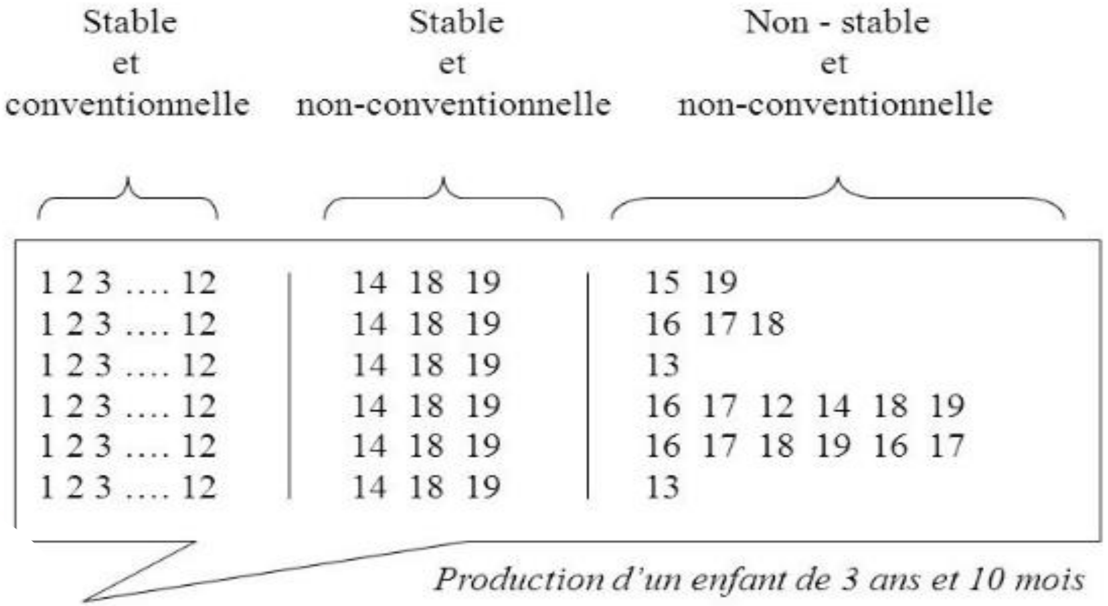
Définition d’un concept (Vergnaud)

NOMBRE

Composante « Langages »

Ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de le représenter

Chaîne numérique verbale



FUSON et al. 1982

Chaîne numérique verbale

- Chapelet
- Chaîne insécable
- Chaîne sécable
- Chaîne terminale

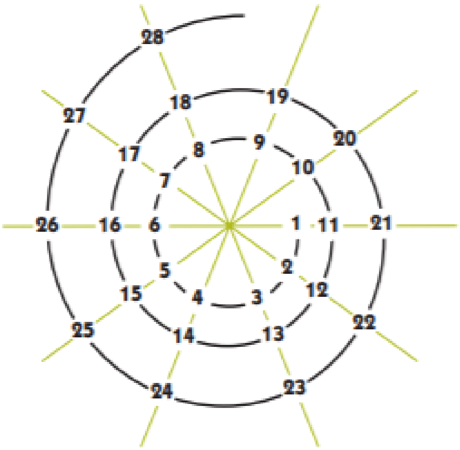
Chaîne numérique verbale

Comment j’évalue ?

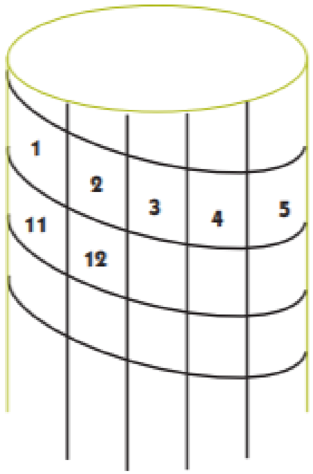
- *« Compte »*
- *« Compte jusqu’à n »*
- *« Compte en commençant à n »*
- *« Compte à l’envers en commençant à n »*

La suite écrite des nombres

Comment fabrique-t-on la suite écrite des nombres ?



dominos



rouleau
en spirale

			1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	22	22	23				

tableau rectangulaire de dix colonnes (remarque : la position de 1 est variable)

Principes de notre numération

Notre système de numération écrite est un **système positionnel de base dix**

Le système est **positionnel** : la **place du chiffre dans l'écriture du nombre lui donne une signification différente**. Dans des écritures utilisant deux chiffres, 12 et 21 ne désignent pas le même nombre d'objets : dans l'écriture 12, le 1 désigne un paquet de dix objets – groupement de premier ordre – et le 2 deux objets isolés alors que dans l'écriture 21, le 2 désigne maintenant deux paquets de dix objets et le 1, un objet isolé.

Principes de notre numération

Le système possède un **zéro** qui indique **l’absence de groupements d’un certain ordre**. Dans 401 le 0 signifie qu’il n’y a pas de paquets de dix isolés

Le système de numération babylonien

Principes de notre numération

Le système est de **base dix** : les **groupements** sont **réguliers** et sont toujours **effectués par paquets de dix**, d'abord par paquets de dix (groupements de premier ordre) puis par paquets de paquets de dix – les paquets de cent – (groupements de deuxième ordre) et ainsi de suite.

Aspect décimal de la numération

10 unités d'un certain rang équivalent à une unité du rang supérieur.

1 dizaine = 10 unités,

1 centaine = 10 dizaines,

donc 1 centaine = 100 unités

1 millier = 10 centaines,

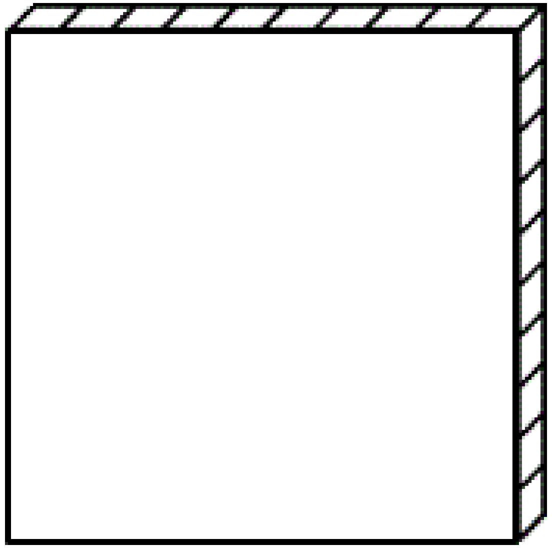
donc 1 millier = 100 dizaines

et 1 millier = 1000 unités

Principes de notre numération

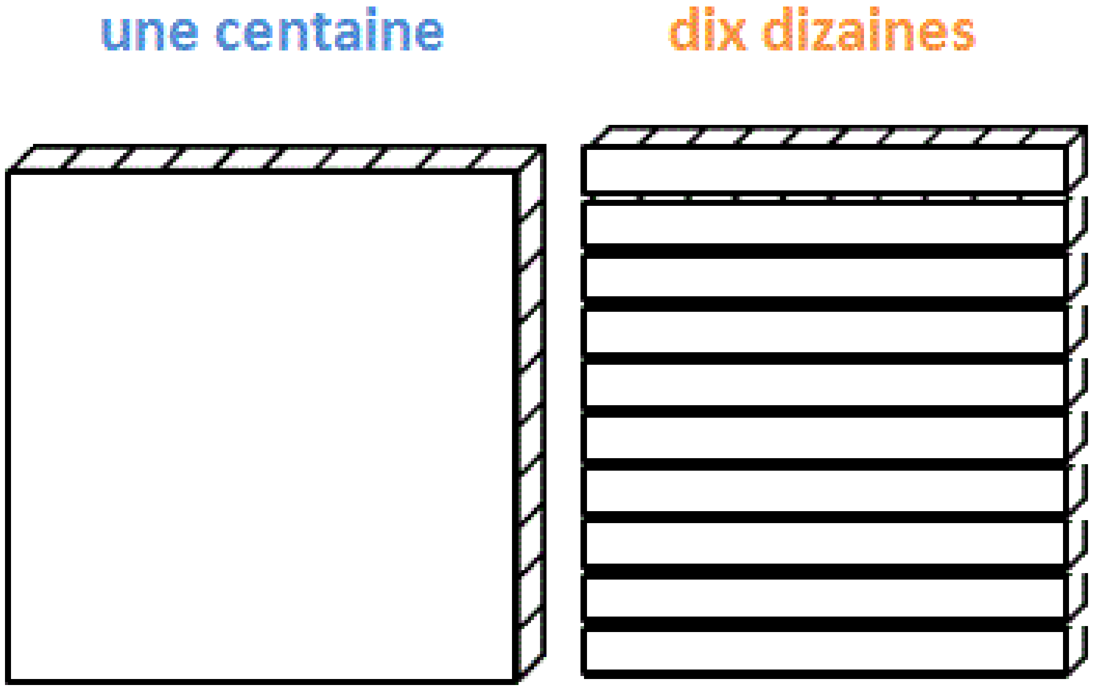
Construire l'aspect décimal de la numération amène les élèves à utiliser les différentes unités de numération selon **différents points de vue :**

une centaine



Principes de notre numération

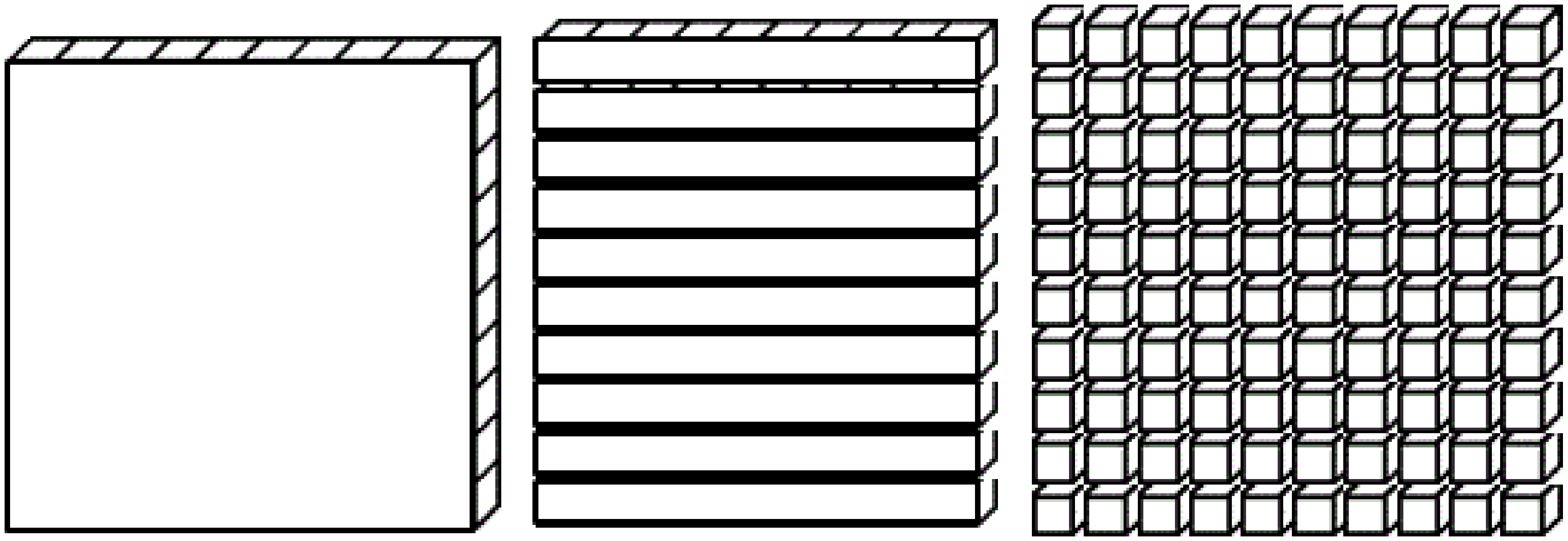
Construire l'aspect décimal de la numération amène les élèves à utiliser les différentes unités de numération selon **différents points de vue :**



Principes de notre numération

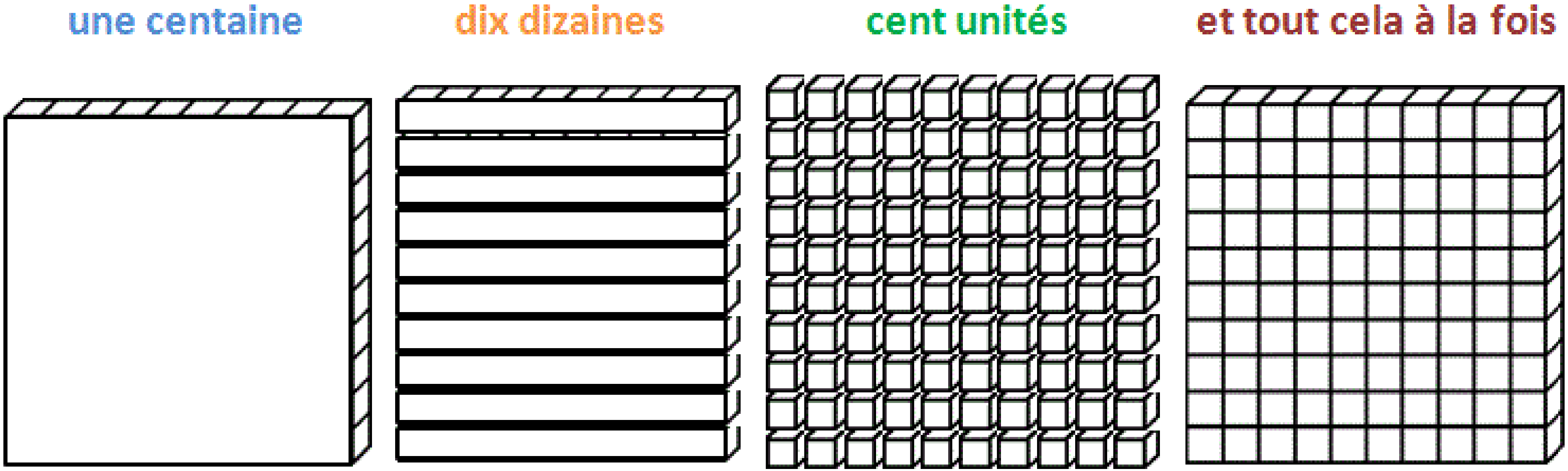
Construire l'aspect décimal de la numération amène les élèves à utiliser les différentes unités de numération selon **différents points de vue :**

une centaine   dix dizaines   cent unités



Principes de notre numération

Construire l'aspect décimal de la numération amène les élèves à utiliser les différentes unités de numération selon **différents points de vue :**



Quelles difficultés ?

Théo, CE2

3. Complète

a. 8 dizaines + 5 unités = ..85......

b. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = ..193....

c. 6 centaines + 9 unités = .69.......

d. 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = ..724......

e. 3 dizaines + 6 centaines = .36......

Commentaires

Camille, CE2

3. Complète

a. 8 dizaines + 5 unités = ..85......

b. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = ..193....

c. 6 centaines + 9 unités = ..69.......

d. 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = ..427......

e. 3 dizaines + 6 centaines = .63......

Commentaires

Quelles difficultés ?

Elisa, CE2

3. Complète

a. 8 dizaines + 5 unités = 85

b. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = 193

c. 6 centaines + 9 unités = 609

d. 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = 427

e. 3 dizaines + 6 centaines = 630

Commentaires

Elisa, CE2

5. Complète

a. 2 dizaines + 15 unités = 35

b. 4 centaines + 10 dizaines = 410

c. 5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = 515

d. 6 centaines + 21 dizaines + 14 unités = 635

Commentaires

De l'oral à l'écrit et inversement

NUMÉRATION ORALE Celle des mots : « quatre-vingts »	NUMÉRATION ÉCRITE Celle des chiffres : « 80 »
Elle comprend 29 mots : • 16 mots de « un » à « seize » ; • 5 mots pour les nouvelles dizaines ; • 6 mots pour les puissances de 10 (« cent, mille, millions »…) ; • 1 mot pour l'absence de quantité (« zéro ») ; • le mot « et ».	**Elle se fonde sur :** • l'emploi de dix chiffres (de 0 à 9) ; • la règle de position (10 après 9 et avant 11) ; • la marque de l'absence de quantité (0).
Son organisation n'est pas toujours logique ! Ex. : • passage de « seize » à « dix-sept » ; • 1 mot = 1 nombre (« huit ») ou plusieurs mots pour un nombre (cent quarante-deux) ; • difficultés pour les nombres « soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix »… ; • mais une certaine logique de « vingt » à « soixante-neuf ».	**Son organisation logique est parfaite.** Ex. : • algorithmes répétitifs (1-2-3-4-5-6-7-8-9 se répètent à chaque nouvelle dizaine) ; • algorithmes récursifs (chaque chiffre est répété 10 fois dans chaque dizaine, 100 fois dans chaque centaine…).
Comme dans la langue française… on n'écrit pas toujours comme on parle : « On dit *soixante-douze* mais on n'écrit pas *60-12* ! »	

Grille d'analyse

Représentations

Associer mot-nombre et écriture chiffrée

- Ostensif de départ/arrivée
- Taille des nombres
- Dizaines complexes
- Présences de zéros

Associer un nombre à une position sur une demi-droite

- Ostensif de départ
- Orientation
- Bornes
- Repères
- Contrainte temporelle

Associer écriture intermédiaire à écriture chiffrée ou mot-nombre

- Ostensifs de départ/arrivée
- Caractère canonique de l'écriture
- Présence de conversions

Comparer rapidement deux nuages de points

- Taille des collections
- Tailles relatives
- Contrôle des variables physiques

Réciter la comptine numérique

- Nombre de départ
- Nombre d'arrivée
- Sens de la suite
- Pas

Comparer et ordonner des nombres

- Ostensifs
- Tailles relatives
- Domaine numérique
- Compatibilité

Dénombrer une collection groupée

- Ostensifs
- Type de matériel
- Taille des collections
- Contraintes temporelle

Critères didactiques
Critères cognitifs
Critères communs

Définition d'un concept (Vergnaud)

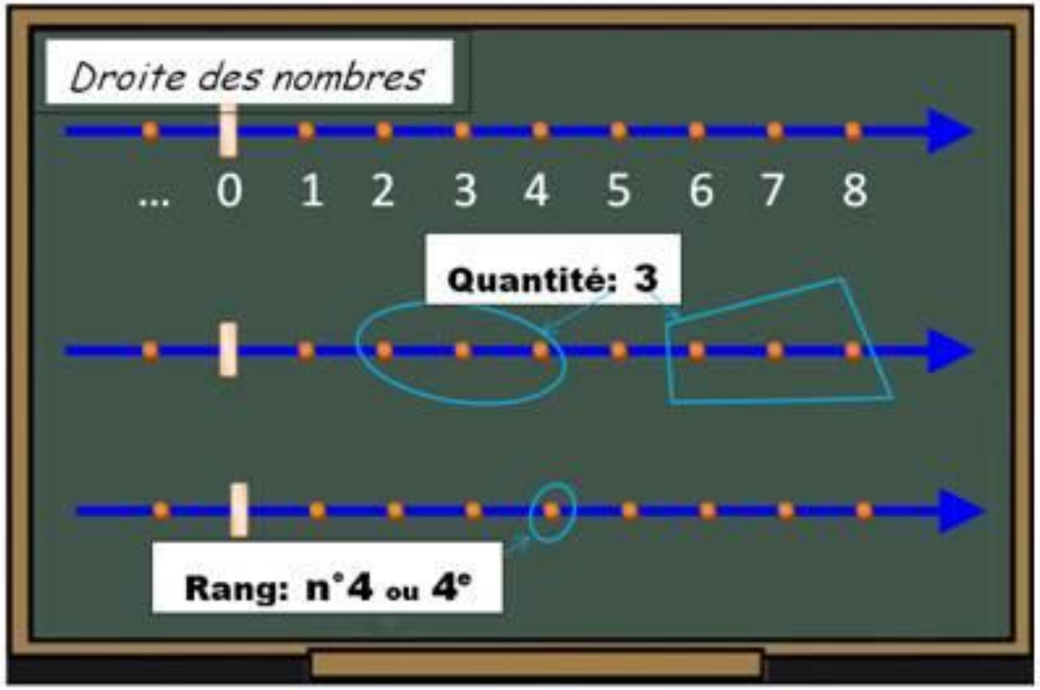
Composante « Problèmes »

Problèmes que le concept permet de résoudre

NOMBRE

Composante « problèmes »

Deux aspects : ordinal et cardinal



Composante « problèmes »

Différentes **fonctions** :

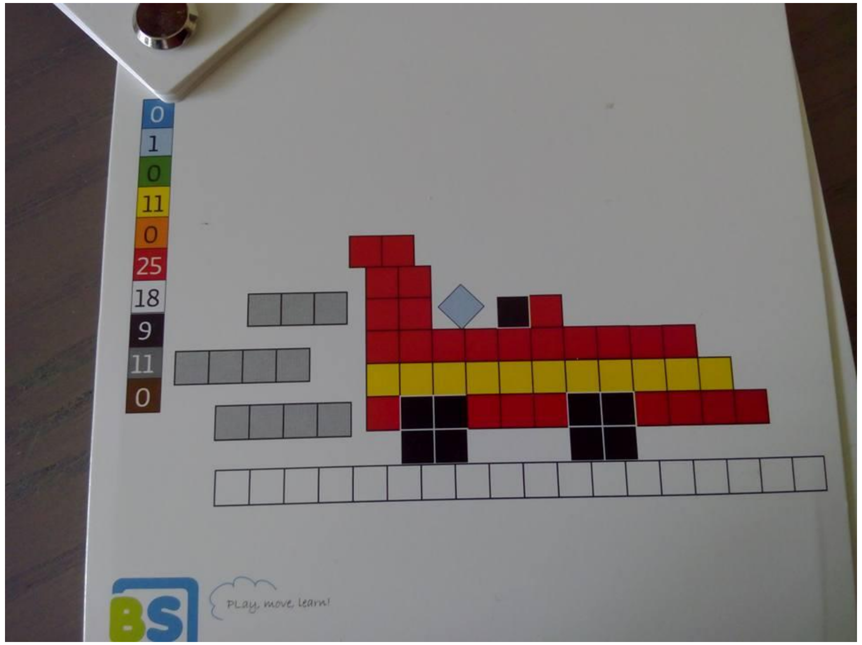
- Mémoriser une quantité ou une position

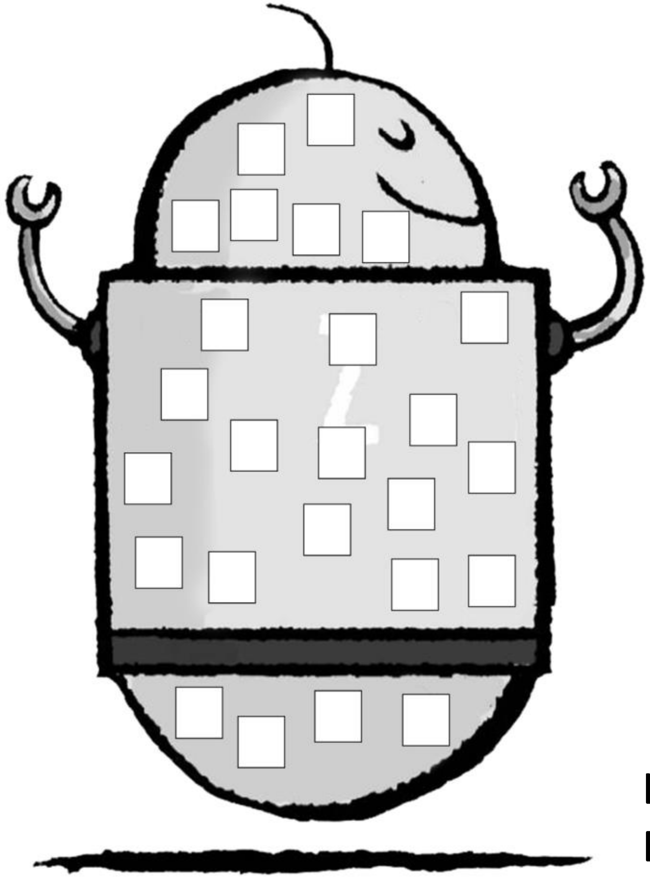
Une situation « fondamentale »

Voiture garage (Briand, Loubet & Salin, 2004)

23 situations d'apprentissage mathématiques décrites et analysées du point de vue didactique

Des variantes





Le Ziglotron
ERMEL

Composante « problèmes »

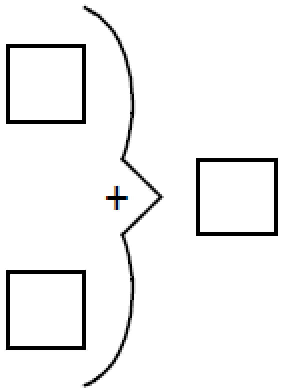
Différentes **fonctions** :

- Mémoriser une quantité ou une
- Comparer deux collections ou deux positions
- Anticiper un résultat (ex : problèmes additifs)

Classification problèmes additifs

Exemples :

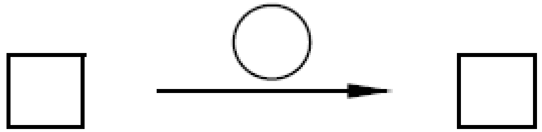
- Dans la classe, il y a 14 filles et 12 garçons, quel est l'effectif de la classe ?
- Dans la corbeille il y a 7 clémentines, Maxime y dépose 5 bananes, combien y a-t-il de fruits dans la corbeille ?
- Un commerçant achète une armoire 125 € et la revend avec un bénéfice de 140 €. Combien le commerçant a-t-il vendu cette armoire ?
- Alex a acheté une baguette de pain à 0,8 € et un croissant à 0,9 €. Combien doit-il à la boulangère ?



Composition

Exemples :

- Julie possédait 42 billes, elle en gagne 15, combien en possède-t-elle ?
- Maud mesurait 1,55 m à 14 ans, depuis elle a grandi de 18 cm, combien mesure-t-elle aujourd'hui ?
- Le prix du timbre poste a augmenté de 10 c, il coûtait un demi-euro, combien coûte-t-il maintenant ?
- Raphaël joue au jeu de l'oie, son pion était sur la case 16, il jette le dé et il fait un 5. Sur quelle case posera-t-il son pion ?

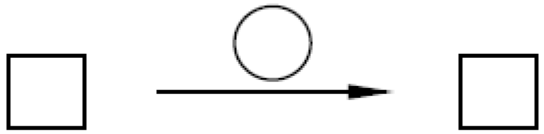


Transformation

Classification problèmes additifs

<u>Exemples :</u>

- Julie possède 42 billes, Maud en a seulement 15. Combien de billes Julie a-t-elle de plus que Maud ?
- Mélina mesure 1,55 m, son amie Éléonore mesure 7 cm de plus qu'elle. Quelle est la taille d'Éléonore ?
- Au jeu de l'oie, le pion de Tom est sur la case 28, Léa est en avance de 8 cases. Quel est le numéro de la case du pion de Léa ?
- Raphaël avait 14 ans le 1er janvier 2 000, quel âge aura-t-il le 1er janvier 2 007 ?



Comparaison

Classification problèmes additifs

Trois situations, une grande variété de problèmes selon :

- le **caractère positif/négatif** de la composition/ transformation/comparaison
- la **place de l'inconnue**

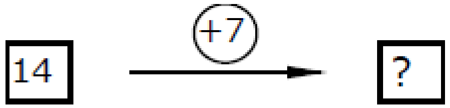
Julie avait 14 billes, elle en a gagné 7 et elle en a maintenant 21.

Classification problèmes additifs

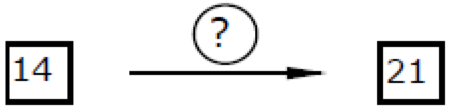
Trois situations, une grande variété de problèmes selon :

- le **caractère positif/négatif** de la composition/ transformation/comparaison
- la **place de l'inconnue**

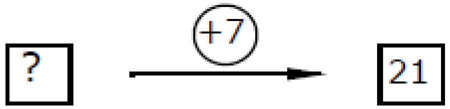
Julie avait 14 billes, elle en a gagné 7, combien en a-t-elle maintenant ?



Julie avait 14 billes, elle a joué et elle en a maintenant 21. Que s'est-il passé ?



Julie a gagné 7 billes, elle en a maintenant 21. Combien avait-elle de billes avant le jeu ?



Difficultés possibles

Liées à la représentations :

- Les problèmes de composition d'états sont en général mieux réussis que les comparaisons d'états.
- Les problèmes de composition de transformations sont souvent difficiles.

Difficultés possibles

L'appartenance à une des catégories ne suffit pas pour apprécier la difficulté d'un problème, d'autres éléments sont à prendre en compte :

- la *place de la valeur inconnue*,
- la *nature positive ou négative d'une transformation ou d'une comparaison*,
- *l'ordre d'apparition des données* dans le texte,
- la *présence de mots inducteurs*
  - Jean a 12 billes et Pierre en a 5 de plus que lui. Combien Pierre a-t-il de billes ?
  - Jean a 12 billes. Il en a 5 de moins que Pierre. Combien Pierre a-t-il de billes ?
- la *taille* et la *nature des nombres* en jeu,
- le *contexte et le vocabulaire,*
- la *place de la question.*

…Ou liées à l'exécution

Grille d'analyse

Problèmes

Comparer des quantités, des positions

- Caractère +/- identifiable
- Taille des collections
- Eloignement
- Disposition
- Caractère manipulable

Construire une collection équipotente

- Taille de la collection
- Disposition
- Nature des objets
- Caractère manipulable
- Eloignement

Anticiper un résultat

- Type de problème
- Ostensif d'arrivée
- Présence de matériel
- Tailles relatives des nombres
- Position de l'inconnue
- Résultat visible
- Place de la question
- Ordre des évènements

Repérer une position

- Nombre d'éléments
- Contraintes sur l'origine

Critères didactiques
Critères cognitifs
Critères communs

Définition d'un concept (Vergnaud)

Composante « Techniques »

Ensemble des techniques et procédures qui permettent de travailler avec ce concept

NOMBRE

Quantification

Calcul

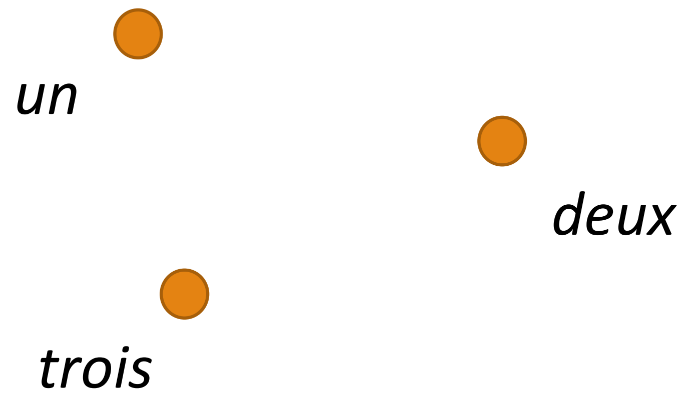
Le dénombrement

5 principes (Gelman & Gallistel, 1978) :

- Correspondance un à un
- Principe d’ordre stable
- Principe de cardinalité
- Principe d’abstraction
- Principe de non pertinence de l’ordre

Point vocabulaire

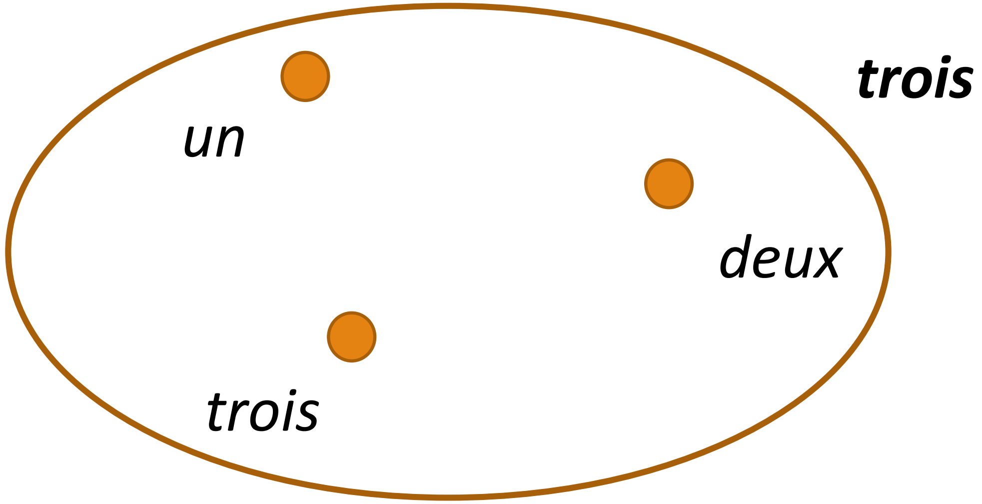
Compter = établir une **bijection** entre un sous-ensemble de la collection des **mots-nombres** de la suite numérique verbale et les **objets** de la collection



Point vocabulaire

Compter = établir une **bijection** entre un sous-ensemble de la collection des **mots-nombres** de la suite numérique verbale et les **objets** de la collection

Dénombrer = **compter** et **définir le cardinal** de la collection énumérée par le dernier mot-nombre énoncé



Difficultés potentielles

Exige de considérer les objets les uns après les autres et d'associer à chacun un mot-nombre dans un ordre fixe

Capacité sous-tendue par **deux habiletés** qui doivent être **coordonnées** :

- **Composante verbale**

Connaissance et énonciation des noms des nombres dans l'ordre correct

- **Composante motrice**

Pointage (visuel ou manuel) de chaque élément jusqu'à ce que tous aient été considérés une et une seule fois

L’énumération (Briand & al., 2004)

Revenons donc à l'activité de comptage elle-même. Pour compter le nombre d'éléments d'une collection finie montrée, l'élève doit nécessairement :

1- Etre capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.

2- Choisir un élément d’une collection.

3- Enoncer un mot nombre. (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mots-nombres).

4- Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.

5- Concevoir la collection des objets non encore choisis.

6- Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 fois tant que la collection des objets à choisir n’est pas vide.

7- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.

8- Enoncer le dernier mot nombre.

Les boîtes d’allumettes

Troubles neuro-visuels/dyspraxie

Le geste des yeux ou le geste des mains n’est pas suffisant précis pour obtenir un comptage fiable

Représentation quantitative variable

Pistes d’aides :

- Inscrire une marque ou entourer chaque élément compté
- Utiliser des jetons ou des objets déplaçables
- Mettre les objets comptés dans une boîte
- Utiliser des objets adaptés (ni trop petits ni trop gros)

Comment faites-vous ?

ADDITION	SOUSTRACTION	MULTIPLICATION	DIVISION
6+4	6-1	7 x 8	10 / 2
12+18	19 - 7	15 x 10	100 / 4
250 + 650	100 - 45	7 x 15	63 / 7
127 + 190	37 - 22	6 x 17	17 200 / 100
326 + 544	860 - 515	24 x 24	105 / 5
774 + 689	774 - 389	39 x 102	972 / 27

Avant le calcul

Techniques basée sur le comptage :

- **Recompter** le tout
- **Surcompter** (procédure qui consiste à compter depuis un nombre N pour ajouter à N ou pour retrancher N)
- **Décompter** (procédure qui consiste à compter « à rebours » depuis un nombre N pour retrancher à N)

Du comptage au calcul

Représentation figurative de la situation

Représentation mathématique de la situation

Ce passage est

- Lent
- Rarement définitif pour un même élève
- Jamais simultané pour tous les élèves

Du comptage au calcul

Pour **favoriser l'évolution des procédures** des élèves, l'enseignant **peut jouer sur la taille des nombres** en jeu :

– deux petits nombres : recomptage sur les doigts, reconnaissance visuelle globale

– un grand nombre et un petit : surcomptage, décomptage

– deux grands nombres : utilisation de la numération (groupement des paquets de 10) ou calcul

– nombres inclus dans le champ numérique des tables : utilisation du calcul ;

– nombres multiples de 10 : extrapolation de résultats connus avec utilisation de la numération.

Différents types de calculs

- Suivant le type de fonctionnement cognitif convoqué
- Suivant le moyen utilisé pour calculer

Deux modes de fonctionnement cognitif

Résultat connu

Calcul automatisé

6+7

Décompositions

5+5+1+2

6+4+3

Doubles

6+6+1

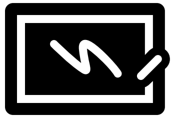
7+7-1

Calcul réfléchi

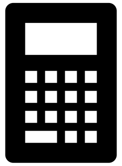
Trois modalités

Calcul mental

Calcul écrit



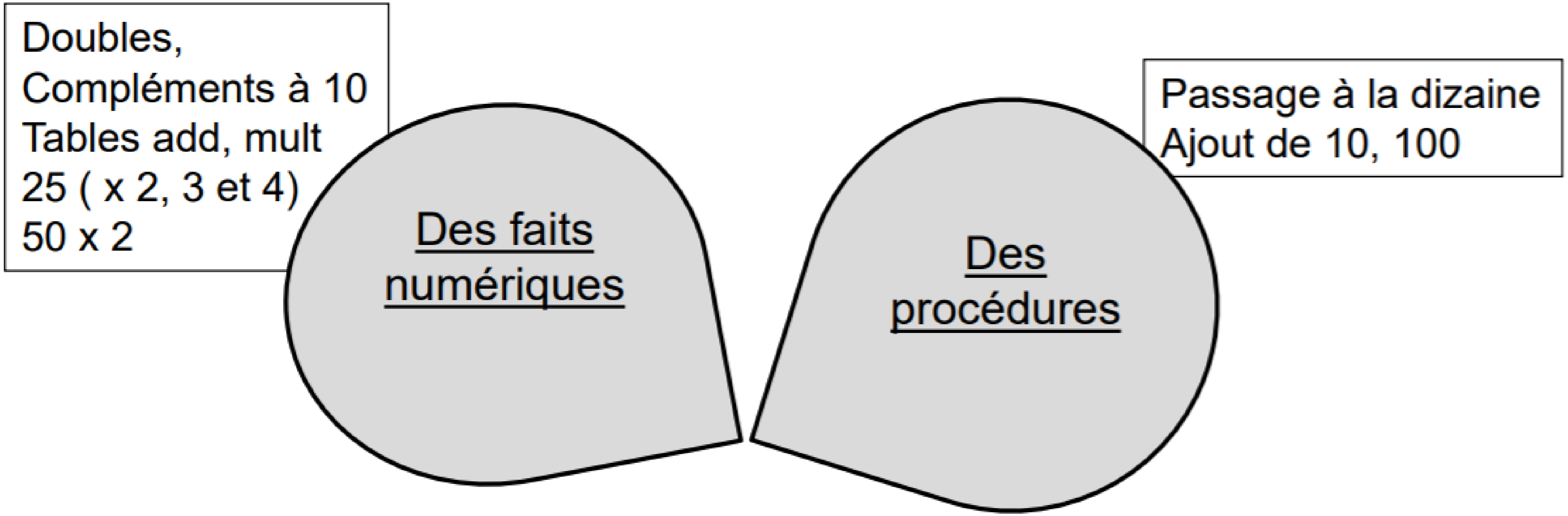
Calcul instrumenté



Différents types de calculs

	Calcul réfléchi	Calcul automatisé
Calcul mental	78+9=88-1=87 Ou: 12x25=3x4x25=3x100=300 14x25=7x2x25=7x50=350	7x8=56 Ou: Appliquer la règle « multiplier par 25, c'est multiplier par 100, diviser par 4 » sur 12x25 ou sur 14x25 (procédure automatisée)
Calcul écrit	74-69 =74-70+1 =5	Algorithme de l'opération posée
Calcul instrumenté	Calculs dépassant les capacités de la calculatrice Par exp, le produit de *700000000614 x 23*	*567:43* à la calculatrice

Que faut-il automatiser ?



Grille d'analyse

Procédures

Reconnaître de très petites quantités

- Taille des collections
- Disposition
- Contrainte temporelle

Dénombrer

- Taille des collections
- Disposition
- Caractère manipulable
- Répertoire d'arrivée
- Principes de G&G

Enumérer

- Organisation spatiale
- Taille de la collection
- Caractère manipulable
- Conditions matérielles

Calculer

- Ostensifs
- Domaine numérique
- Tailles relatives
- Position de l'inconnue
- Contrainte temporelle

Estimer de grandes quantités

- Taille
- Disposition
- Contrainte temporelle

Critères didactiques
Critères cognitifs
Critères communs

Tests existants

	Problèmes				Procédures					Représentations					
	Comparer des quantités	Construire une collection équipotente	Anticiper un résultat	Communiquer une position	Subitizing	Dénombrer	Calculer	Estimer	Enumérer	Associer mot-nombre et écriture chiffrée	Réciter la comptine numérique	Comparer des nombres	Associer écriture int. et mot-nombre ou écriture chiffrée	Dénombrer une collection groupée	Comparer rapidement des nuages de points
Zareki-R			✔			✔	✔	✔		✔	✔	✔			
WJ			✔			✔	✔			✔	✔				
MathEval			✔		✔	✔	✔			✔	✔	✔			
Examath			✔		✔		✔	✔		✔		✔	✔	✔	✔
Tedi-Math		✔	✔			✔	✔			✔	✔	✔	✔	✔	✔
UDN-II	✔	✔				✔	✔			✔	✔				
4 étapes		✔		✔		✔					✔				
ECPN	✔		✔			✔									
Maternelle	✔	✔	✔	✔		✔				✔	✔				
ERMEL		✔	✔			✔				✔	✔				
EvalNumC2	✔	✔	✔			✔	✔			✔		✔	✔	✔	

Tests accessibles

MathEval (https://sites.google.com/site/testmatheval/home)

MATHEVAL

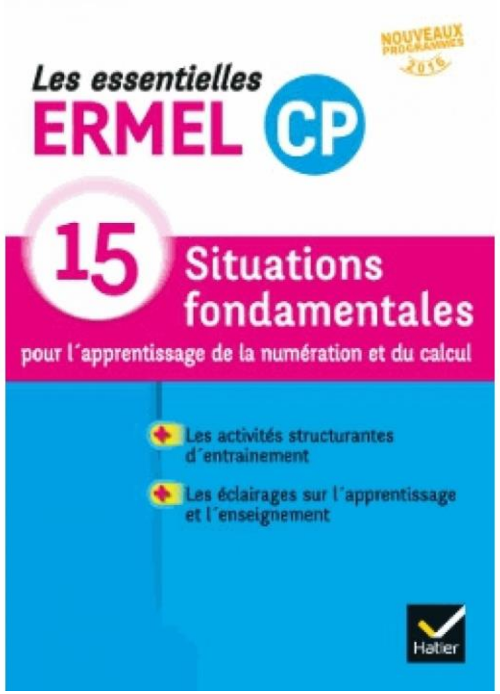
DÉPISTAGE DE LA DYSCALCULIE

ECPN (Epreuves Conceptuelles de résolution des Problèmes Numériques)

http://francoiseduquesne.free.fr/theme3/ECPN-glossa.pdf

Tests accessibles

ERMEL : Prise d’information initiale CP



Dispositif de repérage

https://enquete.univ-reims.fr/limesurvey/index.php?sid=777571&lang=fr

Des questions ?

merci